



Método de Convergência LU, QR e SVD Aplicados a Circuitos Elétricos Reais

Isabely de Oliveira Trevisan | isabely.ot25@aluno.ifsc.edu.br¹
Vitória Luísa Galera Roversi | vitoria.lg2007@aluno.ifsc.edu.br²
Ilca Ghiggi | ilca@ifsc.edu.br³
Rafael Silva Pippi | pippi@ifsc.edu.br⁴
Cristiano Venturi | cristiano.venturi@ifsc.edu.br⁵

Edital de fomento do trabalho 01/2025 - PIBIC-EM - CNPq
Trabalho de Pesquisa

DT 3 - Educação, Cidadania, Desenvolvimento Social e Práticas Inclusivas

Resumo:

Este projeto integra matemática, física, eletricidade e programação, aplicando a modelagem de circuitos elétricos para obtenção de sistemas lineares. O objetivo foi analisar métodos numéricos avançados para a resolução desses sistemas, utilizando as fatorações LU, QR e a Decomposição em Valores Singulares (SVD). A metodologia consistiu no estudo teórico e no desenvolvimento de algoritmos no Octave, aplicados a exemplos comparativos. Os resultados demonstraram coerência com os valores experimentais obtidos em laboratório, evidenciando sua aplicabilidade.

Palavras-chave: circuito elétrico; métodos numéricos; sistemas lineares; convergência; modelagem matemática.

Introdução

No âmbito do Edital 01/PIBIC/2025, esta pesquisa deu continuidade aos estudos relacionados à modelagem matemática de circuitos elétricos, fundamentando-se na indissociabilidade entre ensino, pesquisa e extensão no curso técnico do IFSC. Em continuidade à pesquisa anterior, centrada em métodos como Cramer e eliminação de Gauss, este trabalho abordou sistemas lineares associados à modelagem de circuitos elétricos reais por meio de métodos numéricos avançados, como fatoração LU, decomposição QR e Decomposição em Valores Singulares (SVD). A metodologia compreendeu o estudo teórico desses métodos e o desenvolvimento de algoritmos

¹ Isabely de Oliveira Trevisan, estudante do curso técnico em Desenvolvimento de Sistemas integrado ao ensino médio do IFSC Câmpus Chapecó.

² Vitória Luísa Galera Roversi, estudante do curso técnico em Informática integrado ao ensino médio do IFSC Câmpus Chapecó.

³ Ilca Maria Ferrari Ghiggi, Professora do curso de Engenharia de Controle e Automação do IFSC Câmpus Chapecó.

⁴ Rafael Silva Pippi, Professor do curso de Engenharia de Controle e Automação do IFSC Câmpus Chapecó.

⁵ Cristiano Venturi, Professor do curso de Eletroeletrônica do IFSC Câmpus Chapecó.

computacionais no ambiente Octave, posteriormente aplicados à resolução de um circuito elétrico modelado especificamente para a pesquisa. Os resultados demonstraram que os métodos implementados apresentaram resultados coerentes com os dados obtidos experimentalmente em laboratório. A pesquisa evidenciou a contribuição da integração entre matemática, física e programação para a compreensão e resolução de modelos computacionais aplicados, proporcionando formação científica articulada à prática tecnológica.

Fundamentação teórica

A resolução de sistemas lineares provenientes da modelagem de circuitos elétricos reais impõe desafios significativos, especialmente quando as matrizes resultantes são mal condicionadas. Conforme Chapra e Canale (2013), o mau condicionamento ocorre quando pequenas oscilações nos coeficientes — derivadas de variações nominais de componentes ou imprecisões experimentais — acarretam discrepâncias substanciais na solução, podendo afetar a precisão numérica das soluções. Embora métodos iterativos, como Gauss-Seidel, sejam eficientes para sistemas de grande porte, Burden e Faires (2013) ressaltam que tais técnicas podem apresentar divergência ou baixa taxa de convergência diante de matrizes mal estruturadas, cenário frequente em circuitos complexos.

Nesse contexto, a pesquisa justifica-se pela necessidade de explorar métodos diretos mais robustos, como as fatorações LU e QR, além da Decomposição de Valores Singulares (SVD). Segundo Strang (2006), a SVD é aplicada para diagnosticar instabilidades numéricas, enquanto as fatorações diretas são amplamente utilizadas em sistemas não simétricos.

Procedimentos metodológicos

A metodologia foi estruturada em quatro etapas integrando modelagem matemática, experimentação laboratorial e computação científica.

Inicialmente, realizou-se a revisão dos modelos desenvolvidos em 2025 e a análise do condicionamento das matrizes associadas aos circuitos elétricos estudados. A partir desse diagnóstico, selecionaram-se os métodos numéricos fatoração LU, decomposição

QR e Decomposição em Valores Singulares (SVD), considerando sua aplicação em sistemas lineares.

Na etapa seguinte, foram desenvolvidos algoritmos computacionais no ambiente GNU Octave para resolução dos sistemas modelados. Posteriormente, realizaram-se montagens experimentais dos circuitos em laboratório, com coleta de dados de corrente e tensão por meio de multímetros digitais.

Diante de discrepâncias identificadas em uma das montagens, realizou-se investigação experimental utilizando um circuito de controle para verificação das inconsistências observadas. Esse processo permitiu corrigir a montagem física e validar os modelos matemáticos implementados.

Por fim, os resultados foram sistematizados em relatórios e produções científicas, consolidando a articulação entre matemática, física, programação e experimentação no contexto do ensino técnico integrado.

Resultados e discussões

O desenvolvimento das etapas propostas proporcionou uma vivência científica profunda, articulando conceitos de álgebra linear, física e programação. Os resultados obtidos demonstram a aplicabilidade dos métodos numéricos avançados (LU, QR e SVD) na resolução de modelos matemáticos distintos.

Para a resolução dos sistemas lineares, foram utilizados quatro métodos numéricos. As Figuras 1 e 2 apresentam exemplos das implementações computacionais desenvolvidas para os métodos LU e SVD.

Eliminação de Gauss: transforma a matriz original em triangular superior por meio da eliminação dos elementos abaixo da diagonal principal, obtendo a solução via substituição regressiva.

Fatoração LU com pivotamento parcial: decompõe a matriz no formato $PA = LU$, utilizando permutações de linhas para aumentar a estabilidade numérica.

Decomposição QR: decompõe a matriz A em uma matriz ortogonal Q e uma matriz triangular superior R , permitindo maior estabilidade numérica.

Decomposição em Valores Singulares (SVD): representa a matriz no formato $A = U\Sigma V^T$, em que U e V são matrizes ortogonais e Σ é uma matriz diagonal com os valores singulares de A .

Os algoritmos implementados no GNU Octave permitiram automatizar a resolução dos sistemas lineares estudados. As Figuras 1 e 2 apresentam exemplos das implementações desenvolvidas para os métodos LU e SVD.

Figura 1 – Implementação computacional do método LU em GNU Octave.

```
% FATORAÇÃO QR (Gram-Schmidt clássico)
Q = zeros(n, n);
R = zeros(n, n);

for j = 1:n
    v = A(:, j);
    for i = 1:j-1
        R(i, j) = Q(:, i)' * A(:, j);
        v = v - R(i, j) * Q(:, i);
    end
    R(j, j) = norm(v);
    if R(j, j) == 0
        error('As colunas de A são linearmente dependentes!');
    end
    Q(:, j) = v / R(j, j);
end

% RESOLUÇÃO DO SISTEMA (sem inversa)
y = Q' * b;
x = R \ y;

% VERIFICAÇÃO
erro = norm(A*x - b);
disp('Erro residual ||A*x - b|| =')
disp(erro)
```

Fonte: Algoritmo implementado em Octave.

Figura 2 – Implementação computacional do método SVD em GNU Octave

```
% ===== 4. VALORES SINGULARES =====
sigma = sqrt(max(lambda, 0));
r = sum(sigma > eps);

% ===== 5. MONTAR SIGMA =====
Sigma = zeros(m, n);
for i = 1:r
    Sigma(i,i) = sigma(i);
end

% ===== 6. CALCULAR U E V =====
if m >= n
    % U = (1/sigma_i) * A * v_i
    U = zeros(m, m);
    for i = 1:r
        U(:,i) = (A * V(:,i)) / sigma(i);
    end
    [Q, ~] = qr(U, 0);
    U = Q;
else
    % V = (1/sigma_i) * A' * u_i
    V = zeros(n, n);
    for i = 1:r
        V(:,i) = (A' * U(:,i)) / sigma(i);
    end
    [Q, ~] = qr(V, 0);
    V = Q;
end

% ===== 7. VERIFICAÇÃO  $A \approx U * \Sigma * V'$  =====
A_rec = U * Sigma * V';
erro = norm(A - A_rec);

% ===== 8. RESOLUÇÃO DO SISTEMA  $Ax = b$  USANDO SVD =====
% Pseudo-inversa de  $\Sigma$ 
Sigma_inv = zeros(n, m);
for i = 1:r
    Sigma_inv(i,i) = 1 / Sigma(i,i);
end

% Solução via SVD
x_svd = V * Sigma_inv * U' * b;

% Solução direta (para comparação)
x_dir = A \ b;

% ===== 9. VERIFICAÇÕES =====
res_svd = norm(A * x_svd - b);
res_dir = norm(A * x_dir - b);
dif_sol = norm(x_svd - x_dir);

% ===== 10. RESULTADOS =====
disp('--- MATRIZES ---');
disp('A ='); disp(A);
disp('U ='); disp(U);
disp('Sigma ='); disp(Sigma);
disp('V ='); disp(V);
fprintf('Erro de reconstrução ||A - UEV'|| = %.2e\n\n', erro);
```

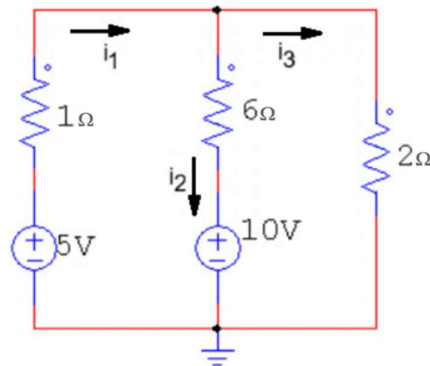
Fonte: Algoritmo implementado em Octave.

A seguir apresentam-se os modelos de circuitos elétricos utilizados e os resultados obtidos para cada método.

Exemplo 1 – Circuito Didático (Circuito A):

O primeiro sistema analisado foi construído com finalidade pedagógica, permitindo verificar a correta implementação computacional dos métodos estudados.

Figura 3 – Representação do Circuito A.



Fonte: Circuito montado pelos professores vinculados a pesquisa.

A modelagem matemática do circuito conduziu ao sistema linear representado pela Equação (1):

$$\begin{cases} 2i_1 + i_2 + i_3 = 4 \\ i_1 + 3i_2 + 2i_3 = 5 \\ i_1 + 0i_2 + 0i_3 = 6 \end{cases} \quad (1)$$

Nesta etapa de controle, o sistema linear 3x3 apresentou coeficientes inteiros e bem condicionados. Conforme a Tabela 1, houve convergência absoluta entre todos os métodos analíticos e numéricos.

Tabela 1 – Relação entre o método utilizado e as Correntes em A dos Circuito A

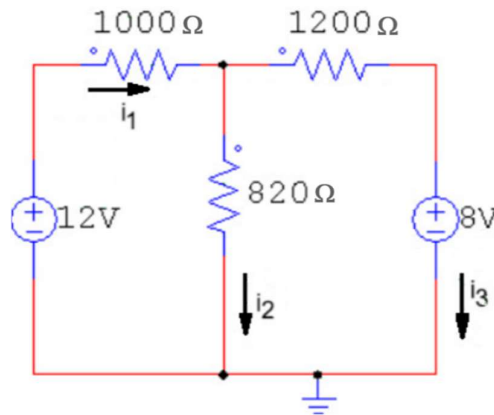
Método	i_1	i_2	i_3
Gauss/LU/QR/SVD	6×10^{-3}	15×10^{-3}	-23×10^{-3}

Fonte: Dados organizados pelas bolsistas a partir dos testes realizados durante a pesquisa (2025/2026)

Esta fase confirmou a correta implementação dos algoritmos no software Octave.

Exemplo 2 – Circuito Real em Bancada (Circuito B):

Figura 4. – Representação do Circuito B.



Fonte: Circuito montado pelos professores vinculados a pesquisa.

A partir das Leis de Kirchhoff e das relações de Ohm, obteve-se o sistema linear:

$$\begin{cases} 1000i_1 + 820i_2 + 0i_3 = 12 \\ 0i_1 + 820i_2 - 1200i_3 = 8 \\ i_1 - i_2 - i_3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Abaixo apresenta-se a Tabela 2, com a comparação das correntes obtidas por cada um dos métodos.

Tabela 2 – Relação entre o método utilizado e as Correntes em A dos Circuito B

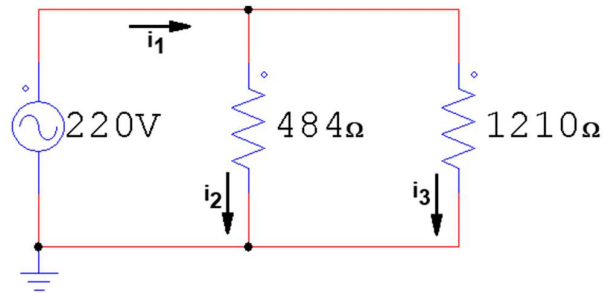
Método	i_1	i_2	i_3
Gauss/LU/QR/SVD	$5,8855 \times 10^{-3}$	$7,4567 \times 10^{-3}$	$-1,5712 \times 10^{-3}$
Laboratório	$5,81 \times 10^{-3}$	$7,51 \times 10^{-3}$	$-1,57 \times 10^{-3}$

Fonte: Dados organizados pelas bolsistas a partir dos testes realizados durante a pesquisa (2025/2026)

Diferentemente do modelo didático, o Circuito B apresentou coeficientes com ordens de grandeza distintas, característica de sistemas reais que podem induzir ao mau condicionamento numérico. Entretanto, quando comparado os métodos utilizados com as medições em laboratório, revelou-se uma proximidade rigorosa, demonstrando coerência entre os resultados numéricos e experimentais, conforme apresentado na Tabela 2.

Exemplo 3 – Circuito Real com Carga de Lâmpadas (Circuito C):

Figura 5 – Representação Circuito C.



Fonte: Circuito montado pelos professores vinculados a pesquisa.

A modelagem matemática foi realizada a partir das Leis de Kirchhoff para tensões e correntes, resultando no seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ 0i_1 - 484i_2 + 0i_3 = -220 \\ 0i_1 + 484i_2 - 1210i_3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

A resolução numérica de (3), pelos métodos propostos, permitiu testar os modelos em uma situação prática de maior escala.

Tabela 3 – Relação entre o método utilizado e as Correntes em A dos Circuito C

Método	i_1	i_2	i_3
Gauss/LU/QR/SVD/Tikhonov	0,6235	0,4533	0,17
Laboratório	0,660	0,470	0,183

Fonte: Dados organizados pelas bolsistas a partir dos testes realizados durante a pesquisa (2025/2026)

Os resultados da Tabela 3 demonstram que as soluções numéricas se mantiveram consistentes com a realidade física. As discrepâncias residuais observadas são inerentes às incertezas dos instrumentos de medição e às tolerâncias dos componentes reais, mas sim os limites práticos da experimentação física frente ao modelo idealizado.

Considerações finais

A execução deste projeto permitiu atingir os objetivos propostos, validando a eficácia da modelagem matemática e da computação científica na resolução de problemas da engenharia elétrica. A transição entre a fundamentação teórica, a implementação em ambiente Octave e a validação laboratorial permitiu concluir que métodos como QR e SVD mostraram-se adequados para garantir a estabilidade numérica em circuitos reais. Para a validação dos resultados, adotou-se uma faixa de tolerância de 5%, limite padrão de variação permitido para que os componentes ou as respostas de um circuito elétrico sejam considerados corretos.

O projeto contribuiu para a formação das estudantes na manipulação de algoritmos avançados e na análise crítica de dados. As principais dificuldades enfrentadas, como a identificação de erros de montagem e o tratamento de incertezas experimentais, consolidaram-se como os maiores alcances do trabalho, fomentando o desenvolvimento de competências investigativas e a autonomia científica.

Por fim, os esforços para materializar a indissociabilidade entre ensino, pesquisa e extensão foram plenamente exitosos, uma vez que o projeto conectou o currículo técnico (ensino) à produção de conhecimento científico (pesquisa) e à aplicação prática de soluções tecnológicas para desafios reais de laboratório (extensão), fortalecendo a formação integrada no IFSC.

Referência ao fomento recebido

Esta pesquisa contou com fomento do CNPq, no âmbito do Programa PIBIC-EM, destinado ao incentivo à iniciação científica de estudantes do ensino médio.

Referências

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Análise numérica**. 2. ed. Tradução da 8. ed. norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

CHAPRA, Steven C. **Métodos numéricos aplicados com MATLAB para engenheiros e cientistas**. Tradução de Rafael Silva Alípio. 3. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.



STRANG, Gilbert. **Linear Algebra and Its Applications**. 4. ed. Belmont: Cengage Learning, 2006.