03

DA QUEDA DAS FOLHAS AOS ÁTOMOS E CIRCUITOS ELÉTRICOS

Este trabalho foi desenvolvido em um projeto de iniciação científica Edital PIPCIT-Nº01/2011/PRPPGI.

GERSON GREGÓRIO GOMES
Bacharel, mestre e doutor em Física (UFSC);
Professor do IFSC, Daltec,
Campus Florianópolis
gerson.gomes@ifsc.edu.br

ÉVELIN PINTO LAMBERTES SEVERO
Licenciada em Ciências da Natureza com habilitação em Física (IFSC), Campus Araranguá, SC.
Acadêmica do bacharelado em Física, (UNESP)
Campus Guaratinguetá, SP.
evelin.lambertes@gmail.com

RESUMO

A proposta deste trabalho é apresentar o movimento browniano como o protótipo básico para a introdução de conceitos da física dos processos estocásticos e mostrar como o desenvolvimento dessa área da física contribuiu significativamente para a aceitação da existência de átomos na ciência moderna. Veremos também que a abordagem devida à Langevin, através da equação que leva o seu nome, embora menos famosa que a de Einstein, revelou-se mais profícua e proporcionou a aplicação dos métodos estatísticos desenvolvidos em uma ampla gama de fenômenos, tais como as flutuações em circuitos elétricos..

PALAVRAS-CHAVE

Movimento Browniano, Processos Estocásticos, Átomos, História da Ciência.

DA QUEDA DAS FOLHAS AOS ÁTOMOS E CIRCUITOS ELÉTRICOS

1. INTRODUÇÃO

Você já deve ter visto, quando está em uma sala escura e há um pequeno feixe de luz entrando por algum orifício na janela, diminutos grãos de poeira em movimento irregular, como se executassem uma dança caótica. É notável que um fenômeno desse tipo, aparentemente tão simples, tenha desencadeado uma verdadeira revolução na ciência, gerando inclusive diversas aplicações tecnológicas. O movimento browniano, como ficou conhecido esse fenômeno aleatório, foi alvo de estudo, no início do século XX, de um então recente ramo da física: a física estatística, que se ocupa de sistemas compostos por um número muito grande de partículas e, por isso mesmo, faz uso da estatística, através de cálculos de valores médios.

As flutuações da corrente elétrica em um circuito, o movimento de partículas de areia nas misturas de cimento, o movimento de micelas de caseína no leite ou o movimento das partículas de aerossóis nas nuvens (PAIS, 1995) são mais alguns exemplos de fenômenos aleatórios, estudados pela física estatística.

Além das aplicações práticas, a contribuição que talvez possa ser considerada a mais significativa à humanidade é o fato do estudo dos movimentos erráticos, especialmente o movimento browniano, ter sido determinante na aceitação da teoria atômica, conforme veremos mais adiante.

Na seção seguinte, falaremos um pouco mais sobre o movimento browniano e descreveremos os processos estocásticos. Na seção 3, discutiremos brevemente os trabalhos de Einstein sobre o movimento browniano e suas implicações na aceitação da hipótese atômica. Na seção 4, traremos à discussão a abordagem de Langevin para o movimento browniano, mostrando uma aplicação dessa abordagem em circuitos elétricos.

2. MOVIMENTO BROWNIANO E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

A ideia de átomo, embora muito diversa da concepção atual, remonta aos antigos gregos, mas sua existência só foi aceita, na ciência moderna, após o estudo do movimento browniano, no início do século XX. Referindo-se à dança irregular dos grãos de poeira num raio de luz, o poeta romano Lucrécio, século I a.C., teria escrito:

> *"Esta dança é uma indicação de movimentos subjacentes invisíveis da matéria... grande número de partículas minúsculas, sob o impacto de choques invisíveis, mudam de direção e se agitam...Assim, o movimento parte dos átomos e é gradualmente levado até o nível de nossos sentidos."* (NUSSEZENVEIG, 1998, p. 237).

Ao lermos como Lucrécio se refere a esse movimento, é possível identificarmos claramente o conceito de movimento browniano, que constitui o exemplo mais simples de um processo estocástico. Ele refere-se simplesmente a processos, geralmente aleatórios, dependentes do tempo (VAN KAMPEN, 2007). O movimento browniano é um movimento aleatório de uma partícula qualquer imersa num fluido. A partícula browniana deve ser *macroscopicamente pequena*, mas *microscopicamente grande*, em comparação com as moléculas do fluido, das quais ela sofre colisões.

Embora errático e irregular, esse fenômeno pode ser descrito, e a física estatística é a responsável por explicar as especificidades desse movimento, como também dos demais fenômenos aleatórios existentes na natureza. Para sua melhor compreensão e definição, utiliza-se meios probabilísticos, já que o grande número de eventos não permite estudos isolados de cada processo aleatório.

Tomemos como exemplo a queda de uma folha de papel. Devido a sua forma e densidade, a folha sofre ação da resistência do ar, o que torna sua queda um movimento extremamente irregular, difícil de ser descrito com precisão. A princípio, nenhum padrão parece existir nesse fenômeno. Mas se observarmos a queda de um número muito grande de folhas, após um determinado tempo, um padrão surge: o amontoado de folhas no chão terá uma forma específica (TOMÉ e OLIVEIRA, 2001), o que está relacionado à interpretação frequencial, conforme veremos a seguir.

A física estatística é um dos ramos da física que tem como principal objetivo deduzir propriedades macroscópicas dos sistemas por meio do estudo das propriedades microscópicas de seus constituintes. Pode ser dividida em física estatística do equilíbrio e física estatística fora do equilíbrio, que se ocupa dos processos estocásticos. Uma das bases da teoria estatística é o conceito de probabilidade, que deve ser analisado sob dois aspectos: um referente a sua definição e outro a sua interpretação.

A definição de probabilidade é muito simples: tomamos um conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência e atribuímos a eles valores não negativos; a soma desses valores precisa ser igual à unidade. Um exemplo é o lançamento de um dado. Não é possível prever exatamente qual face cairá voltada para cima, mas sabemos que o número de resultados possíveis para essa experiência é 6, devido ao número de faces. Dessa forma, podemos falar da *probabilidade* de queda de cada face. Nesse exemplo, a cada resultado possível (cada face), é atribuído o valor 1/6, pois cada uma das seis faces tem 1 chance em seis (ou cerca de 17% de chance) de cair voltada para cima. Dessa forma, se somarmos as probabilidades de cada uma das seis faces, o valor encontrado será igual a um, correspondendo assim à definição.

A interpretação usual de probabilidade ocorre a partir da análise da frequência que ocorre determinado resultado, e é denominada interpretação frequencial[1]. Voltando ao exemplo da queda das folhas, se marcarmos um quadrado no chão e deixarmos cair inúmeras folhas, a probabilidade das folhas caírem dentro do espaço demarcado é dada pelo número de folhas caídas no quadrado dividido pelo total de folhas caídas. Se observarmos, novamente, o caso da queda das folhas, entenderemos que, quando um número consideravelmente grande de folhas é deixado cair de um ponto específico, o acúmulo dessas ganhará certa forma comum, e é essa regularidade observada nos fenômenos aleatórios que possibilita seu estudo e aplicações (TOMÉ e OLIVEIRA, 2001).

3. EINSTEIN E O MOVIMENTO BROWNIANO

Conforme ilustrado nas palavras de Lucrécio, o movimento browniano já era conhecido desde a antiguidade. Entretanto, no verão de 1827, o botânico inglês Robert Brown fez observações microscópicas de suspensões com grãos de pólen de um tipo de flor noturna chamada *clarkia pulchella*. Ele observou que o movimento era aparentemente constante, uma espécie de "dança aleatória", e ocorreu-lhe que a origem dessa constância do movimento poderia ser orgânica, ou seja, que seriam minúsculos seres vivos os causadores disso. Porém, bastaram algumas análises de grãos minerais, partículas de cinza ou poeira, para que ele descartasse essa ideia.

Com isso, Brown foi o primeiro a concluir (daí a origem do nome) que esse movimento não tem nada a ver com a presença de organismos vivos e logo indicou que seria muito mais interessante os físicos assumirem a responsabilidade por esse estudo, e assim o fizeram (HAW, 2005). Tempos após os estudos de Brown, outros cientistas já haviam tirado importantes conclusões sobre o movimento browniano, e surgiram afirmações indicando que ele resultaria das colisões entre as partículas imersas e as do fluido.

Seguindo essas bases, Albert Einstein, no início do século XX, passa a estudar esse fenômeno.

No ano de 1905, o então desconhecido físico que trabalhava em um escritório de patentes na Suíça publica cinco artigos marcantes na história da física[2] . Dois desses, um sobre o tema de sua tese de doutoramento finalizada em abril, e outro em maio, referiam-se ao movimento browniano. Vale ressaltar que esses artigos foram os mais citados de Einstein, chegando a superar todos os seus outros trabalhos juntos (HAW, 2005).

Nesses trabalhos, Einstein buscava fatos que comprovassem a existência dos átomos e percebeu que os estudos sobre o movimento browniano proporcionariam as condições necessárias para isso. A partícula browniana era considerada uma lupa para o mundo atômico, embora muitos químicos e físicos da virada do século XIX para o século XX não acreditassem na sua existência (HAW, 2005). Entre os químicos, um dos assuntos em debate era se os átomos eram reais ou se deveriam ser usados apenas como um modelo didático para melhor compreensão da natureza. Já entre os físicos, as discussões giravam em torno da teoria cinética dos gases, com a atenção voltada, principalmente, à segunda lei da termodinâmica. É nesse contexto histórico que Einstein analisa o movimento browniano e é "o primeiro a tornar visíveis as moléculas" (PAIS, 1995). Em seu artigo de maio de 1905 (o artigo da tese), Einstein juntou a termodinâmica dos líquidos com a mecânica estatística para obter a primeira teoria física, testável experimentalmente, do movimento browniano. Aproximava-se a primeira chance de investigação direta do mundo atômico. Einstein imaginou que uma partícula browniana com um diâmetro de, por exemplo, 0,001 mm (grande o bastante para ser visível em um microscópio) proporcionaria a lente de aumento para a investigação do mundo atômico. Seria como se você pudesse "ver um átomo invisível" e comparar seu comportamento diretamente com a teoria cinética dos gases.

No artigo da tese, Einstein considera uma solução de açúcar em água. A partícula de açúcar seria a partícula browniana, macroscopicamente pequena, que sofreria as colisões com as moléculas de água..

O movimento aleatório executado pela partícula de açúcar, devido às colisões com as moléculas de água, é análogo ao movimento browniano, como é ilustrado na figura 1.

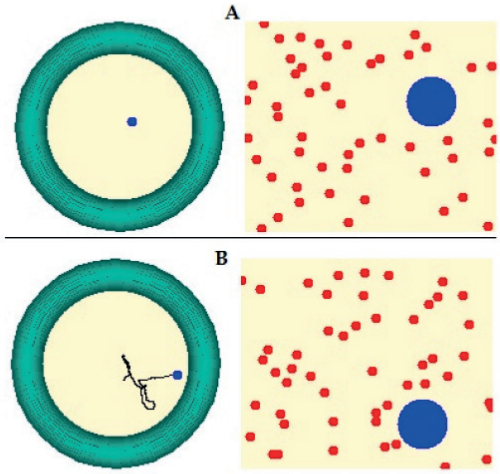

Figura 1 - A parte A da figura mostra, em azul, a representação da partícula browniana, e, em vermelho, as partículas de um fluido qualquer. Na parte B, no lado esquerdo, há um exemplo da trajetória irregular da partícula browniana devido às colisões com as partículas do fluido. Fonte: Disponível em <http://galileo.phys.virginia.edu/classes/109N/more_stuff/Applets/Brownian/brownian.html>.

Einstein obtém, em seu trabalho sobre o movimento browniano, a expressão[3]:

$$NA = R.T.t / 6 .\varpi.\eta.a.\langle x2 \rangle, (1)$$

que relaciona o número de Avogadro NA com o deslocamento quadrático médio <x2> da partícula browniana, do qual falaremos na próxima seção. Nessa equação, R é a constante universal dos gases, T a temperatura absoluta da solução, η a viscosidade do fluido, a o raio da partícula, e t o tempo necessário para que a partícula tenha um deslocamento quadrático médio (FRANÇA e GOMES, 2005).

Com exceção, talvez, do raio da partícula, todas essas grandezas eram conhecidas ou passíveis de medição naquela época. O número de Avogadro N_A é, certamente, a quantidade de interesse, pois fornece o número de moléculas (ou átomos) em uma certa quantidade de substância (1 mol). Além disso, de posse da massa de 1 mol da substância (já conhecida da química), pode-se calcular a massa de uma molécula, simplesmente dividindo a massa de 1 mol por N_A. Einstein obteve $N_A \approx 2 \times 10^{23}$ partículas por mol. Com esse trabalho, Einstein convenceu Jean Perrin a realizar experimentos cuidadosos para medir $\langle x^2 \rangle$ e o raio das partículas brownianas. Essas experiências foram realizadas pelo grupo de pesquisa de Perrin a partir de 1908, encontrando o valor $N_A \approx 7 \times 10^{23}$ partículas por mol (STACHEL, 2001). Por esses trabalhos, Perrin ganhou o prêmio Nobel de física em 1926.

A tamanha relevância desses estudos não é justificada somente pelos estudos de Einstein em seu artigo sobre o movimento browniano, mas decorre da múltipla determinação do número de Avogadro, ou seja, a concordância existente entre os valores obtidos foi imprescindível para o fim dos debates sobre a realidade molecular, que veio a se extinguir no início do século XX (PAIS, 1995).

É interessante destacar ainda que Einstein, a partir de 1907, iniciou o estudo das flutuações da voltagem em capacitores. Dessa forma, tornou-se o precursor da análise teórica e experimental do "ruído" existente em circuitos elétricos (FRANÇA e GOMES, 2005). Fenômenos importantes associados às flutuações térmicas da corrente em um circuito elétrico foram descobertos por Nyquist e Johnson em 1928. Uma análise mais didática do movimento browniano pode ser encontrada em FIGUEIRA (2011).

4. A ABORDAGEM DE LANGEVIN PARA O MOVIMENTO BROWNIANO

Há pouco mais de cem anos, o físico francês Paul Langevin propôs, de maneira fenomenológica, a equação que leva seu nome, com o objetivo de descrever o movimento browniano.

Esse fenômeno é particularmente interessante, como já vimos, pois há uma enorme variedade de situações físicas em que ele ocorre, evidenciando as flutuações estatísticas que surgem em um sistema em equilíbrio térmico (REIF, 1965), (SALINAS, 1997), (TOMÉ e OLIVEIRA, 2001). Por outro lado, a existência de *flutuações* relaciona-se intimamente com os fenômenos onde ocorre a *dissipação de energia e irreversibilidade*. Mesmo na física clássica, a descrição de um processo irreversível não é uma tarefa trivial. Pode-se introduzir dissipação em equações microscópicas a partir da segunda lei de Newton, adicionando-se termos fenomenológicos, exatamente como o fez Langevin, tais como um amortecimento dependente da velocidade $\alpha\, dx/dt$ ($\alpha > 0$) em um oscilador harmônico de frequência ω, amortecido e sujeito a uma força externa $f(t)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + \omega^2 x(t) = f(t). \quad (2)$$

Langevin formulou essa equação para o movimento browniano, mas ela mostrou-se aplicável a inúmeros problemas nos quais as flutuações desempenham importante papel, dentre os quais a corrente flutuante em um circuito elétrico, exemplo que discutiremos mais adiante. Dessa forma, a abordagem de Langevin, para a teoria do movimento browniano, tem se mostrado mais profícua que a de Einstein. Não obstante, na ausência de força externa (de origem gravitacional ou elétrica), a equação de Langevin pode ser escrita da seguinte forma:

$$m\, dv / dt = - \alpha v + F'(t) \quad (3)$$

em que m é a massa, v a velocidade da partícula, t o tempo que tem relação direta com a força aleatória $F'(t)$ e a força de atrito $-\alpha v$, em que α é a constante de atrito. Podemos perceber aqui um exemplo de um importantíssimo ingrediente da física estatística fora do equilíbrio, a chamada *relação flutuação-dissipação*, porque é possível analisar a relação existente entre a força de atrito e a força estocástica (VAN KAMPEN, 2007).

Assim, é notável que os mesmos mecanismos responsáveis pelas flutuações são responsáveis pela dissipação da energia.

A força F(t) é dita estocástica porque ela depende da posição dos muitíssimos átomos que estão em movimento constante (REIF, 1965). Essa interação da força com os muitos graus de liberdade[4] é o que a caracteriza como uma função que flutua (varia) com o tempo.

Por conta dessa irregularidade, não se pode explicar com exatidão a dependência da F de t, por isso formula-se esse problema em termos estatísticos. Para isso, imagina-se um *ensemble* (um conjunto) de muitos sistemas, cada um composto por uma partícula e um meio circundante. Para cada sistema desse ensemble, a F(t) é uma função aleatória em t (REIF, 1965). É mais simples entender isso se pensarmos no lançamento de uma moeda, quando queremos conhecer a probabilidade de cada face cair voltada para cima. Será equivalente lançarmos a mesma moeda repetidas vezes, por exemplo 30 lançamentos, ou lançarmos muitas moedas iguais, como 30 moedas. Nesse caso, o lançamento de muitas moedas iguais é análogo ao *ensemble*, no qual os sistemas correspondem a cada moeda que será lançada.

A figura 2 ilustra a maneira de extrair valores médios num *ensemble* para uma força estocástica. A taxa com que essa força varia pode ser caracterizada se o *tempo de correlação* for conhecido, isto é, uma média aproximada do tempo entre dois máximos (ou mínimos) da F(t). A partícula é dita estacionária porque é imaginada fixa, ou seja, sem poder escolher uma direção no espaço. Com isso, a média da força será zero, pois deve ser ora positiva e ora negativa.

Se calcularmos a média da posição <x> da partícula, perceberemos que também será nula. Isso é melhor compreendido quando se pensa no exemplo de passeio aleatório, conhecido como "problema do marinheiro bêbado", que consiste no caso mais simples de difusão (NUSSEZENVEIG, 1998).

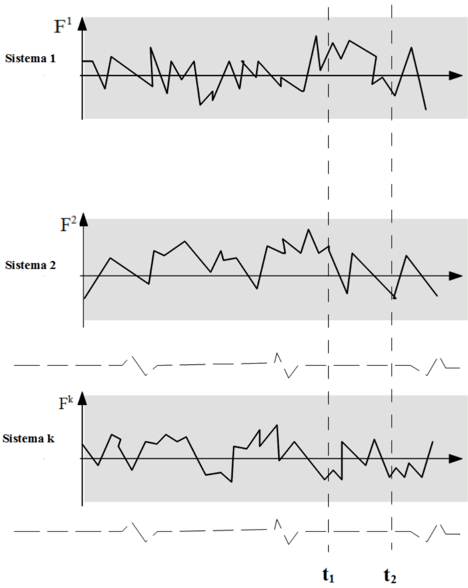

Figura 2: Sistemas do ensemble e o comportamento da força flutuante F(t) sob uma partícula estacionária. Os instantes t1 e t2 são considerados o mais próximos possíveis a fim de calcular valores médios da força.
Fonte: REIF (1965, p. 562).

Sabendo disso, é mais conveniente pensar em números positivos, tomando então o deslocamento quadrático médio <x2>. De maneira simplificada, vamos entendê-lo como a média da diferença, ao quadrado, entre a posição após N passos e a média desse deslocamento, que pode ser escrita <xN - <xN>2>. Após compreendermos essa ideia do passeio aleatório, basta substituirmos o número de passos do bêbado pelo número de colisões da partícula browniana, que é proporcional ao tempo de observação t.

A título de ilustração, vamos agora aplicar a abordagem de Langevin para o movimento browniano em circuitos elétricos. O livro de Reif (1965), apesar de antigo, é um clássico da área, e traz essa análise no seu capítulo 15. Considere um circuito formado pela associação, em série, de um resistor R, um indutor L e um capacitor C (circuito RLC), em equilíbrio térmico à temperatura T. As flutuações de corrente elétrica nesse circuito são análogas ao movimento de uma partícula browniana, e podem ser representadas a partir de uma f.e.m. alternada V(t). Sendo q(t) é a carga no capacitor como função do tempo, a equação de Langevin para esse sistema é completamente análoga à equação (2):

$$d2q\,(t) / dt2 + (R/L)\, dq\,(t) / dt + (1/LC)\, q\,(t) = V(t). \quad (3)$$

Não nos ocuparemos aqui da solução dessa equação. Apenas destacaremos os pontos e resultados fundamentais. A energia média armazenada no indutor e no capacitor são iguais e, segundo o princípio de equipartição de energia clássico, valem kT/2. Esse resultado está longe de ser óbvio, não tendo, inclusive, como seria de se esperar, validade em todos os casos[5].

A quantidade de interesse obtida na análise desse problema é a densidade espectral da f.e.m. flutuante:

$$J + (\omega 0) = 2kTR / \varpi\,. \qquad (4)$$

Essa pode ser entendida como uma espécie de valor médio da f.e.m. (a função de correlação) na representação das frequências. A equação (4) é um caso especial da já mencionada relação flutuação-dissipação. É válida, inclusive, no caso de um circuito com uma impedância arbitrária, também podendo ser generalizada para o caso quântico. Nesse domínio surgem, como já esperados, efeitos novos, devidos, entre outros, à energia de ponto zero (ver nota 6).

A importância do sistema dado aqui como exemplo e do método de análise utilizado é dupla. Os circuitos do tipo RLC são encontrados em diversos dispositivos eletrônicos utilizados em nossa tecnológica sociedade atual.

Por outro lado, esses sistemas permitem modelar uma ampla gama de fenômenos e os métodos de análise desenvolvidos proporcionam investigar questões de fundamentos da física, tais como o conceito de equilíbrio térmico e a origem e aplicabilidade da própria equação de Langevin (GOMES, 2013).

REFERÊNCIAS

[1] Essa interpretação é a usual, existem porém outras, por exemplo, a Bayseana.

[2] Os artigos foram, nessa ordem, sobre o efeito fotoelétrico, o primeiro (tese) e o segundo sobre movimento browniano, a teoria da relatividade especial, e a relação massa-energia (E = mc2) (CHALMERS, 2005).

[3] Einstein obtém, na verdade, duas equações; para mais detalhes, ver SALINAS (2005) e CARUSO e OGURI (2006).

[4] Para compreender o termo graus de liberdade e a interação com a força, denominada estocástica, é útil pensar em uma molécula de um gás que executa um movimento de translação, possuindo componentes de velocidade v em relação aos três eixos. Assim é possível entender que, como há componentes de v nos três eixos, essa molécula terá três graus de liberdade de translação, já que existem três formas independentes da molécula se deslocar e assim armazenar energia (HALLIDAY et al, 2009).

[5] Ver GINZBURG (1989), capítulo 14, para uma análise aprofundada dessa questão, feita pelo físico russo ganhador do prêmio Nobel.

REFERÊNCIAS

CARUSO F., OGURI, V. Física Moderna: origens clássicas e fundamentos quânticos. Rio de Janeiro, Campus, 2006.

CHALMERS, M.. Five papers that shook the world. Physics World, UK, v.18, n.1, p.16-17, 2005

FIGUEIRA, J., Movimento browniano: uma proposta do uso das novas tecnologias no ensino de Física, Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v.33, n.4, 2011.

FRANÇA, H., GOMES, G., Einstein e a dança dos grãos de pólen, Revista USP, São Paulo, n.66, p.44-53, 2005.

GINZBURG, V. L., Applications of Electrodynamics in Theoretical Physics and Astrophysics. US, CRC Press, 1989.

GOMES, G. G., Sistemas de Osciladores Acoplados em Thermofield Dynamics. Tese (Doutorado) Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

HALLIDAY, D. et al. Fundamentos de Física 2. Rio de Janeiro, LTC, 2009.

HAW, M. Einstein's random walk, Physics World, UK, v.18, n.1, p.19-22, 2005.

NUSSEZENVEIG, H.M., Curso de Física Básica 2: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor. São Paulo, Edgard Blücher, 1998.

PAIS, A., "Sutil é o Senhor..." A Ciência e a Vida de Albert Einstein. Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 1995.

REIF, F., Fundamentals of Statistical and Thermal Physics. US, McGraw-Hill Book Company, 1965.

SALINAS, S., Introdução à Física Estatística. São Paulo, EDUSP, 1997.

_________, Einstein; o atomismo e a Teoria do Movimento Browniano, Revista Física na Escola, São Paulo, v.6, n.1, p.23-26, 2005.

STACHEL, J., O ano miraculoso de Einstein. Rio de Janeiro, UFRJ, 2001.

TOMÉ, T., OLIVEIRA, M. Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade. São Paulo, EDUSP, 2001.

VAN KAMPEN, N. G., Stochastic Processes in Physics and Chemistry. Hol, Elsevier, 2007.