



# CONSTRUÇÃO E CONTROLE DE UMA PLATAFORMA EXPERIMENTAL BALL AND BEAM

MICHAEL KLUG

*Bacharel em Engenharia Elétrica (UDESC),  
Mestrado e Doutorado em Engenharia de  
Automação e Sistemas (UFSC);  
Instituto Federal de Santa Catarina,  
Campus Joinville  
michael.klug@ifsc.edu.br*

## RESUMO

Neste trabalho aborda-se a construção e controle de uma plataforma experimental tipo Ball and Beam. Para a estrutura optou-se pela utilização de materiais de baixo custo, com o objetivo de colaborar com a instalação futura de um laboratório de controle no IFSC/Joinville. O compensador não linear projetado baseia-se na utilização de modelos fuzzy Takagi-Sugeno e na solução de um problema de otimização convexo descrito por condições baseadas em Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). Um exemplo numérico é utilizado para demonstrar o funcionamento da técnica.

## PALAVRAS-CHAVE

Ball and Beam. Controle Não Linear. LMIs. Modelos Fuzzy T-S.

# CONSTRUÇÃO E CONTROLE DE UMA PLATAFORMA

## 1. INTRODUÇÃO

Na grande maioria dos sistemas de controle práticos, é necessário considerar a presença de certas dinâmicas não lineares. O aparecimento destes termos complica o desenvolvimento de controladores, não sendo normalmente possível obter condições de projeto eficientes e gerais. Diversas técnicas têm sido dedicadas ao controle de tais sistemas, não havendo, porém, uma técnica universal (KHALIL, 2003). Neste contexto, nos últimos anos, os modelos fuzzy de Takagi-Sugeno (T-S) têm recebido especial atenção de engenheiros e pesquisadores em sistemas de controle, principalmente por possibilitarem a representação de sistemas dinâmicos não lineares pela conexão de sistemas lineares invariantes no tempo, denominados de regras ou submodelos, através da utilização de funções de pertinência (TANAKA e WANG, 2001). Desta forma, permite-se que a teoria convencional já extensivamente conhecida e estudada, possa ser aplicada para análise e projeto de controladores.

Os modelos fuzzy T-S podem descrever o sistema não linear original de forma aproximada (TEIXEIRA e ZAK, 1999) ou exata, dependendo do número de regras/subsistemas locais utilizados. Uma relação entre precisão e complexidade deve ser levada em conta pelo projetista para a escolha ideal deste número, ao qual uma redução demasiada de regras pode influenciar seriamente o desempenho, ou, até mesmo, causar a instabilidade do sistema (KLUG e CASTELAN, 2012).

Para o projeto de controladores fuzzy tem-se usado atualmente várias técnicas baseadas na Teoria de Lyapunov (KHALIL, 2003), com abordagens normalmente descritas em termos de desigualdades matriciais lineares, também conhecidas por LMIs (do inglês Linear Matrix Inequalities) (BOYD et al., 1994). Diversos trabalhos podem ser encontrados, tanto em tempo contínuo (FENG, 2006), quanto em tempo discreto (GUERRA et al, 2012; WU et al., 2011).

Neste sentido, um dos objetivos deste trabalho é o estudo da implementação de controladores fuzzy T-S

T-S aplicados a plantas reais. O sistema/planta escolhido é o Bola sobre Barra (do inglês Ball and Beam) sendo um clássico exemplo utilizado para benchmark de controladores (LISBOA et al., 2005). O objetivo é manter uma bola, que rola livremente sobre uma barra, numa posição ou trajetória pré-determinada, através do controle automático da inclinação da plataforma. É um sistema que se mostra eficaz para demonstrar os princípios de controle e as vantagens e desvantagens das diferentes topologias existentes.

Com relação ao controle implementam-se algoritmos baseados no trabalho Klug e Castelan (2011), através da realimentação dos estados do sistema, com um determinado coeficiente de contratividade relacionado a convergência temporal da resposta. Outras leis poderão ser posteriormente implementadas, visto que controle e supervisão são efetuados através de um software implementado em Matlab em comunicação com uma placa controladora tipo Arduino UNO, podendo ser reprogramado para aplicação de outras estratégias de controle.

A principal finalidade deste trabalho é mostrar a estudantes e interessados no assunto, a importância do controle automático e não linear, assim como contribuir para a instalação futura de um laboratório de controle no IFSC/Joinville.

## 2. METODOLOGIA

Diversas estruturas diferenciadas para a plataforma Ball and Beam são encontradas na literatura, tais como as apresentadas nos trabalhos de Wieneke e White (2011) e Chang et al. (2013). Após estudo aprofundado sobre os diferentes métodos de construção, e baseando-se na premissa de se obter uma planta de baixo custo e fácil reprodução, optou-se por alguns materiais específicos e citados na seção a seguir.

# CONSTRUÇÃO E CONTROLE DE UMA PLATAFORMA EXPERIMENTAL BALL AND BEAM

## 2.1 Construção da Plataforma de Controle

Para a construção do projeto mecânico, utilizou-se do software de CAD 3D SolidWorks, de forma a dimensionar cada componente (WIENEKE e WHITE, 2011). O resultado é apresentado na Figura 1.

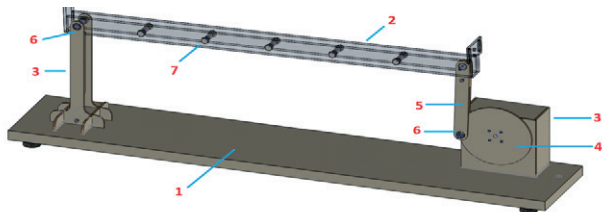


Figura 1 - Desenho 3D da planta Ball and Beam

Os materiais utilizados para construção do Ball and Beam foram:

1. Base da estrutura: MDF (Fibra de Média Densidade);
2. Guia para esfera/bola: Chapa de Acrílico;
3. Suporte fixo e caixa do servomotor: Chapa de TS;
4. Disco acoplado no servomotor: Chapa de TS;
5. Biela: Chapa de TS;
6. Rolamento: Aço;
7. Parafusos: Aço.

As peças mecânicas dos itens 3, 4 e 5 foram usinadas em uma máquina CNC (Controle Numérico Computadorizado). As furações das barras de acrílico, para fixação dos parafusos, foram feitas em uma fresadora industrial.

Para a parte elétrica optou-se pelo uso de um sensor de distância infravermelho, modelo SHARP GP2Y0A21YKOF, a qual possui saída analógica e distância mensurável de 10 a 80 cm, ideal para a aplicação desejada. Quanto ao atuador escolheu-se um servomotor modelo FUTABA S3003, por permitir o posicionamento através de comandos PPM (do inglês *Pulse Position Modulation*), gerados facilmente a partir de qualquer microcontrolador.

## 2.2 Modelo Matemático do Sistema

Para obtenção do modelo matemático, considera-se que a bola role sem deslizamento e que o atrito entre a barra e a bola seja desprezível (CHANG et al., 2013). As constantes e variáveis utilizadas são definidas na Figura 2.

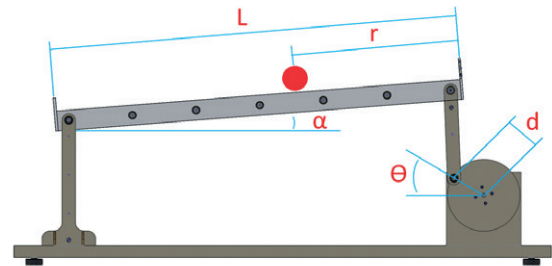


Figura 2 - Parâmetros para Modelo Matemático

Sendo:

- $(m)$  - massa da bola
- $(R)$  - raio da bola
- $(d)$  - deslocamento da alavanca
- $(g)$  - aceleração gravitacional
- $(L)$  - comprimento da barra
- $(I)$  - momento de inércia da bola
- $(r)$  - posição da bola
- $(\alpha)$  - ângulo da barra
- $(\theta)$  - ângulo da engrenagem do servomotor

Baseando-se em Lisboa et al. (2005) e ignorando-se alguns efeitos, pode-se chegar à seguinte equação do comportamento dinâmico do sistema:

$$0 = \left( \frac{I}{R^2} + m \right) r + mg$$

Em (1) nota-se a presença do termo  $\sin\alpha$ , e que pode ser tratado através da linearização do modelo em torno de um ponto de operação, ou pelo processo de modelagem fuzzy T-S descrito em Tanaka e Wang (2001) e Feng (2010). Essas duas metodologias são apresentadas a seguir:

- i) Modelo Linear: Para esse caso, consideram-

# CONSTRUÇÃO E CONTROLE DE UMA PLATAFORMA ESTABILIZADA

se pequenas variações no ângulo  $\alpha$  e a aproximação linear da relação entre o ângulo da barra e o ângulo da engrenagem por  $\alpha \approx (d/L)\theta$ . Obtém-se a seguinte função de transferência:

$$P(s) = \frac{R(s)}{\Theta(s)} = - \frac{mdg}{L(I+m)s^2 + R^2}$$

ii) Modelo Fuzzy T-S: Para esse caso, considera-se a definição do vetor de estados  $x = [r \quad \dot{r}]^T$ , podendo-se reescrever (1) como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x - \left( \frac{mdg}{L(I+m)} \right) \begin{bmatrix} \sin \alpha \end{bmatrix}$$

Na qual utiliza-se a relação não linear  $\alpha = (d/L)\theta$ . Define-se, com base nas dimensões físicas do sistema, que  $-\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$ . Portanto, nota-se que a não linearidade  $\sin\theta$ , pertence ao setor limitado  $\sin\theta \in [b_2 \ b_1]$  (KHALIL, 2003), com  $b_2 = 3\sqrt{3}/2\pi$  e  $b_1 = 1$ , como pode ser visto na Figura 3.

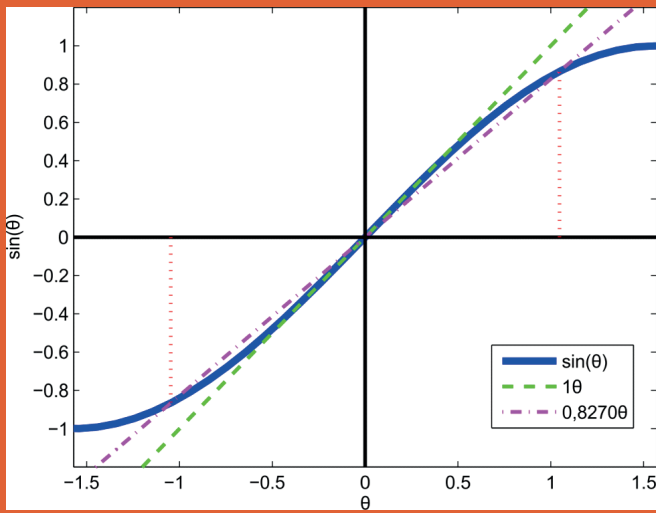


Figura 3: Setor para a não linearidade  $\sin\theta$

Dessa forma, pela metodologia abordada em Tanaka e Wang (2001), pode-se substituir a não linearidade  $\sin\theta$  por

$$\sin\theta = \sum_{i=1}^2 m_i b_i \theta \rightarrow M_1 = \frac{\sin\theta - b_2\theta}{\theta(b_1 - b_2)} \quad \text{e} \quad M_2 = \frac{b_1\theta - \sin\theta}{\theta(b_1 - b_2)} \quad \text{para } \theta \neq 0$$

$$M_1 = 1 \quad \text{e} \quad M_2 = 0 \quad \text{para } \theta = 0$$

Resultando, da propriedade  $\sum_{i=1}^2 M_i = 1$  e do fato que  $\alpha$  sofre apenas pequenas variações ( $\sin\alpha \approx \alpha$ ), no seguinte sistema equivalente:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^2 M_i \{ \check{A}_i x + \check{B}_i \theta \}$$

$$\text{com } \check{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \check{B}_i = - \left( \frac{mdg}{L(I+m)s^2} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ b_i \end{bmatrix}$$

Discretizando cada submodelo em (5) com as relações abaixo descritas (Li et al., 2013)

$$A_i = e^{A_i T_s}, \quad \check{B}_i = \int_0^{T_s} e^{A_i \tau} \check{B}_i d\tau$$

sendo o tempo de amostragem  $T_s = 0,1s$ , e os parâmetros reais dados por  $m = 2,74(10^{-3})kg$ ,  $R = 20(10^{-3})m$ ,  $g = 9,81m/s^2$ ,  $I = 730,67(10^{-9})kgm^2$ ,  $d = 0,13m$  e  $L = 0,6m$ , obtém-se o modelo fuzzy T-S que representa o sistema não linear (1), descrito como:

$$x(k+1) = A(h)x(k) + B(h)u(k)$$

com  $[A(h) \ B(h)] = \sum_{i=1}^2 h_i [A_i \ B_i]$ ,  $h = h(x(k)) = [M_1 x(k) \ M_2(x(k))]$ , e as seguintes matrizes

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0,0053 \\ -0,1275 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0,0053 \\ -0,1055 \end{bmatrix}$$

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para a estabilização do sistema (6), considera-se a lei de controle discreta  $u(k) = K(h)x(k)$  constituída pela realimentação dos estados dependente da função de pertinência  $h$  e com a estrutura matricial  $K(h) = \sum_{i=1}^2 h_i K_i$

A seguinte proposição pode ser estabelecida.

Proposição 1: Dado  $\lambda \in (0,1]$ , considere que existem as matrizes simétricas definidas positivas  $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e as matrizes  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , satisfazendo as seguintes condições LMIs:

$$\begin{bmatrix} -Q_j & A_i U + B_i Y_i \\ * & \lambda(Q_i - U' - U) \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} -2Q_j & (A_i + A_q)U + B_i Y_q + B_q Y_i \\ * & \lambda(Q_i - Q_q - 2U' - 2U) \end{bmatrix} < 0$$

# CONSTRUÇÃO E CONTROLE DE UMA PLATAFORMA EXPERIMENTAL BALL AND BEAM

Então, as matrizes do controlador (8) obtidas por  $K_1=Y_i U^{-1}$  são tais que a origem do sistema em malha fechada é assintoticamente estável com coeficiente de contratividade  $\lambda$ .

Prova: O procedimento utilizado para obtenção das condições de estabilização (9) e (10) pode ser verificado a partir do trabalho Klug e Castelan (2011), e portanto não será aqui apresentado.

### 3.1 Exemplo

Para o exemplo de simulação utilizam-se os ganhos do controlador obtidos da aplicação das condições da Proposição 1 ao sistema descrito pelas equações (6) e (7). Primeiramente efetua-se uma substituição de variáveis para mudar a origem do posicionamento para o centro da barra. Diferentes valores para o fator de contratividade  $\lambda$  são utilizados, obtendo-se os seguintes ganhos do controlador (8)

$$K_1=[11,5781 \quad 8,3827], K_2=[14,2650 \quad 10,1278] \rightarrow \lambda=0,8$$
$$K_1=[6,57490 \quad 8,1297], K_2=[8,01090 \quad 9,81040] \rightarrow \lambda=0,9$$

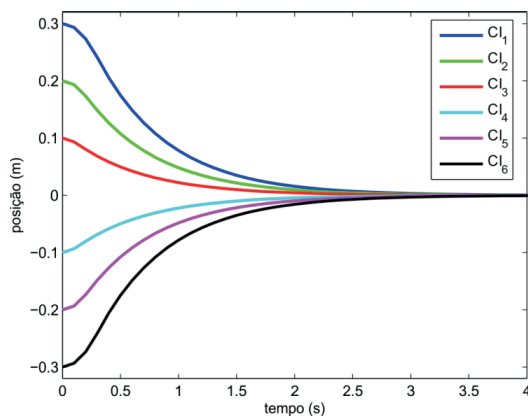
Na Figura 4 observa-se a evolução temporal da posição da bola sobre a barra  $x_f = r$  para diversas condições iniciais do tipo  $Cl_i = x_{0i} = [x_{01i} \quad 0]$ , com  $x_{01i} = [0,3 \quad 0,2 \quad 0,1 \quad -0,1 \quad -0,2 \quad -0,3]$ . Nota-se que a escolha de um menor fator de contratividade  $\lambda$  implica em uma convergência mais rápida das trajetórias para a origem (ou valor desejado).

Observação: Todos os resultados foram obtidos utilizando-se do software Matlab com a interface para solução de problemas de programação convexa Yalmip, e os solvers SEDUMI e SDPT3.

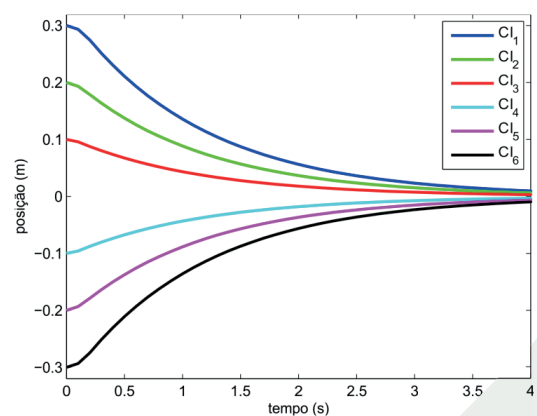
### 3.2 Aplicação ao Sistema Real

Em virtude de testes práticos realizados optou-se por controlar a plataforma Ball and Beam utilizando-se um software gerado em computador. Este software foi criado em ambiente Matlab através do pacote Guide, e o mesmo possui comunicação com uma placa microcontrolada do tipo Arduino UNO. Esta placa é responsável por fazer a leitura da posição da bola advinda do sensor (através de uma entrada analógica) e aplicar o esforço de controle ao servomotor (utilizando-se PPM). Esta escolha deve-se principalmente a finalidade didática a qual a planta foi concebida, ao passo que uma vez que os dados são transportados até o computador é possível fazer a supervisão de todo o processo, observando gráficos, alterando parâmetros, entre outras características. Deve-se enfatizar que em ambiente industrial seria mais adequado a escolha de um controlador embarcado.

Como primeiro passo foi criado um programa para calibração do sensor (Figura 5), visto que o mesmo apresenta uma curva não linear de resposta, que em algumas situações possui pequenas variações dependendo da luminosidade do ambiente e coloração da bola.



(a) para  $\lambda=0,8$



(b) para  $\lambda=0,9$

Figura 4 - Trajetórias para diversas condições iniciais.

# CONSTRUÇÃO E CONTROLE DE UMA PLATAFORMA

Neste programa é necessário que o usuário insira manualmente a bola em seis posições diferentes, orientadas pelos parafusos presentes na estrutura, e que pressione o botão de calibração. Através das leituras obtidas gera-se uma curva da resposta do sensor por interpolação, que será utilizada posteriormente no software responsável pelo controle da estrutura.

Dada a calibração do sensor pode-se acessar o segundo programa, responsável por gerar a lei de controle que será aplicada a plataforma (Figura 6). O usuário é responsável pela inserção da referência desejada (posição da bola requerida) e dos parâmetros do controlador, na qual inicialmente implementa-se um PID (proporcional-integral-derivativo).

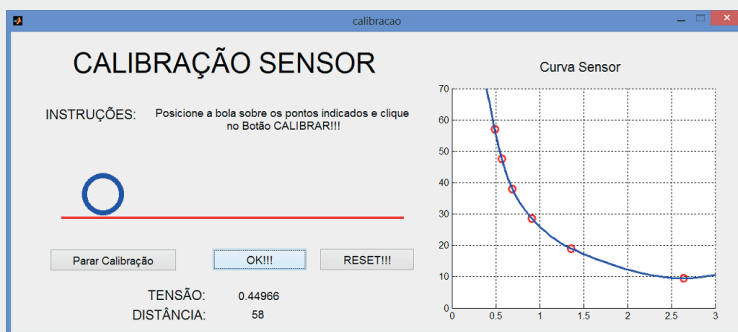


Figura 5 - Programa de Calibração do Sensor

Dada a inicialização, o software apresenta em tempo real as curvas de saída/referência, erro e a ação de controle aplicada, assim como uma figura que se movimenta de acordo com o posicionamento da bola e ângulo da barra, representando o sistema real.

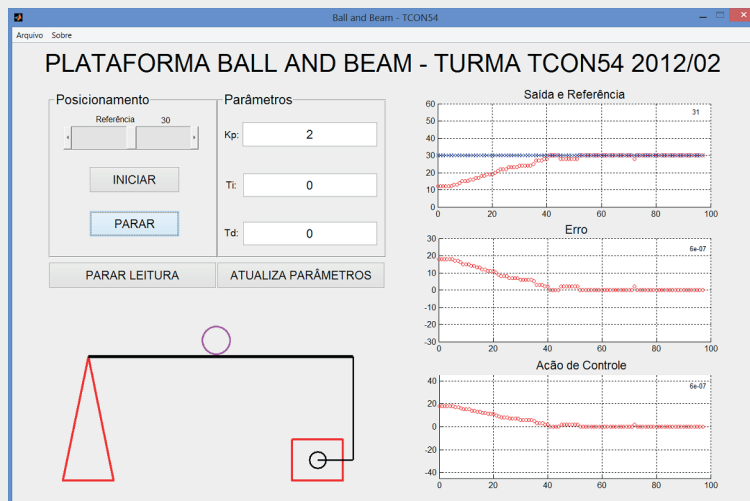


Figura 6 - Programa de Controle

O sistema real finalizado pode ser observado na Figura 7. Como futuras melhorias será tratado a mudança da lei de controle para a abordagem não linear da Proposição 1, além da possível alteração de sensoriamento (sensores ultrassônicos, resistivos, magnéticos, entre outros), visando a obtenção de leituras mais rápidas e precisas.

## 4. CONCLUSÕES

Neste artigo foram apresentados a construção de uma plataforma experimental para o ensino de controle do tipo *Ball and Beam*, e o desenvolvimento de uma estratégia de controle não linear com utilização de modelos fuzzy de Takagi-Sugeno. Os alunos da unidade curricular de Teoria de Controle do IFSC/Joinville podem agora usufruir de uma planta real para testes dos controladores estudados em teoria.

Este sistema, em conjunto com os que virão a ser projetados, poderá ser utilizado para compor um laboratório de controle (atualmente inexistente), diminuindo os custos na aquisição de sistemas comerciais.



Figura 7 - Programa de Calibração do Sensor

### A. PERIÓDICOS:

CHANG, Y. G. ; CHAN, W. S. ; CHANG, C. W. T-S Fuzzy Model-Based Adaptive Dynamic Surface Control for Ball and Beam System. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 60, p2251-2263, 2013.

FENG, G. A Survey on Analysis and Design of Model-Based Fuzzy Control Systems. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 14(5), p.676-697.

GUERRA, T. M.; KERKENI, H.; LAUBER, H.; VERMEIREN, L. An Efficient Lyapunov Function for Discrete T-S Models: Observer Design. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 20(1), p. 187- 192, 2012.

KLUG, M.; CASTELAN, E. B. Compensadores Dinâmicos para Sistemas Discretos no Tempo com Parâmetros Variantes e Aplicação a um Sistema Fuzzy Takagi-Sugeno. Revista Controle & Automação, Vol. 23 (5) p.517-529, 2012.

LI, Z.; PARK, J. B.; JOO, Y. H. Chaotifying Continuous-Time T-S Fuzzy Systems via Discretization. IEEE Transactions on Circuit and Systems - I: Fundamental Theory and Applications, 48, p.1237- 1243, 2001.

TEIXEIRA, M. C. M.; ZAK, H. Stabilizing Controller Design for Uncertain Nonlinear Systems Using Fuzzy Models. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 7(2), p.133-142, 1999.

WU, L.; SU, X.; SHI, P.; QIU, J. A New Approach to Stability Analysis and Stabilization of Discrete-Time T-S Fuzzy Time-Varying Delay Systems. IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics, 41(1), p.273-286, 2011.

WU, L.; SU, X.; SHI, P.; QIU, J. A New Approach to Stability Analysis and Stabilization of Discrete-Time T-S Fuzzy Time-Varying Delay Systems. IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics, 41(1), p.273-286, 2011.

### B. LIVROS:

FENG, G. Analysis and Synthesis of Fuzzy Control System: A Model-Based Approach. CRC Press, 2010.  
BOYD, S.; EL GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.

KHALIL, H. K. Nonlinear Systems. Prentice Hall, 2003.  
TANAKA, K.; WANG, H.O. Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach. John Wiley & Sons, USA, 2001.

### C. TRABALHO EM ANAIS:

KLUG, M.; CASTELAN, E. B. Redução de Regras e Compensação Robusta para sistemas Takagi-Sugeno com Utilização de Modelos Não Lineares. In: X Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, São João del-Rei, 2011.

LISBOA, S. N. D. MAITELLI, A. L. ; FERNANDES, R. G. ; NETO, A. D. D. Controladores PID e Neural Aplicados a uma Planta Ball and Beam. In: VII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, São Luis, 2005.

WIENEKE, J. WHITE, W. N. A Feasibility Assessment of Using Ultrasonic Sensor Position Feedback for a Ball and Beam Apparatus. In: American Control Conference, San Francisco, p.687-692, 2011.