PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DA CONTAGEM

Vanessa Soares Sandrini Garcia
vanessa.sandrini@ifsc.edu.br

Resumo

O estudo dos Princípios Fundamentais da Contagem é essencial para a compreensão da análise combinatória, que possibilita resolver problemas envolvendo agrupamentos e combinações de elementos. Este artigo apresenta os princípios multiplicativo e aditivo, fundamentais para determinar o número de possibilidades em diferentes cenários. Além disso, explora o Princípio da Inclusão e Exclusão, utilizado para evitar contagens duplicadas, e, ainda o Princípio da Casa dos Pombos, que garante a existência de repetições em determinados conjuntos. Para ilustrar esses conceitos, utiliza-se de exemplos rotineiros e aplicados ao cotidiano. Ao fornecer uma visão geral dos métodos de contagem, o artigo busca facilitar a compreensão dos princípios básicos da análise combinatória, destacando sua relevância em diversas situações do cotidiano.

Palavras-chave: análise combinatória; princípios de contagem; métodos combinatórios.

Libras

REVISTA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA DO IFSC

Princípios fundamentais da contagem

Vanessa Soares Sandrini Garcia

Objetivos

Este texto foi elaborado para que você possa:

- conhecer os conceitos básicos da análise combinatória;
- reconhecer os métodos de contagem;
- aplicar os princípios de contagem em problemas práticos.

1 Iniciando o estudo

Desde os primeiros anos escolares desenvolvemos a habilidade de contar e essa tarefa é realizada em diversas atividades do dia a dia. Porém nem sempre contar é tão elementar. A análise combinatória estuda a sofisticação da contagem, buscando a melhor forma de agrupar elementos e calcular possibilidades e resultados possíveis de situações rotineiras.

Segundo Rosen (2010, p. 355), a análise combinatória é estudada “desde muitos anos antes do século XVII, quando questões combinatórias apareceram no estudo de jogos”. E acrescenta que ela é utilizada, por exemplo, “para determinar se há números de telefone ou endereços de protocolo da Internet suficientes para atender a demanda”.

2 Princípios fundamentais da contagem

Para iniciar nosso estudo sobre a contagem, vamos pensar numa situação hipotética. Mike foi convidado para uma festa, mas não sabe muito bem que roupa vestir, então ele decidiu separar algumas opções (Figura 1) para verificar qual combinação ficará melhor.

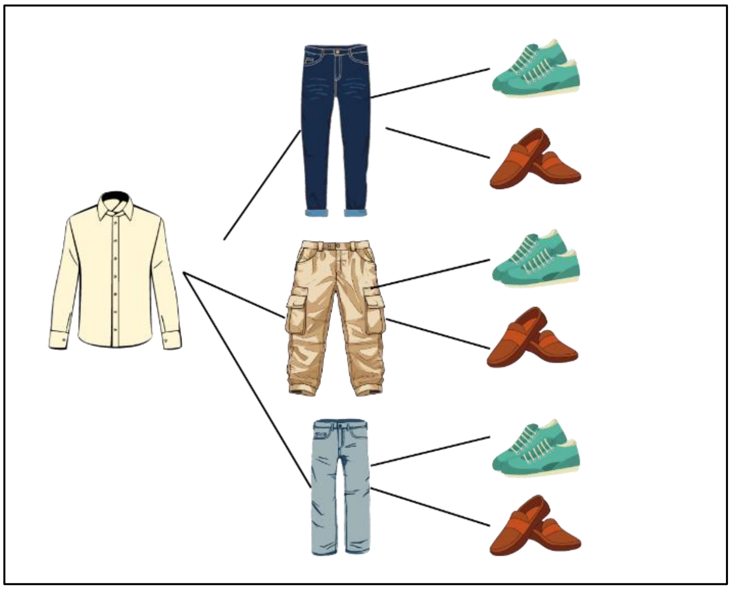
Figura 1 - Opções de vestimentas disponíveis

Fonte: A autora.

Para encontrar todas as combinações possíveis, escolhendo uma camisa, uma calça e um calçado, e resolver essa situação, podemos combinar as peças até esgotarem as possibilidades. Porém, isso nos dará um pouco de trabalho e corremos o risco de esquecer alguma combinação.

Na figura 2, podemos verificar as possibilidades de combinação entre as calças e calçados com a camisa amarela. Com apenas uma das opções de camisa, temos 6 combinações possíveis. Como temos 4 opções de camisa, podemos repetir esse mesmo processo para cada uma delas, chegando a 24 combinações no total.

Figura 2 - Opções de vestimentas disponíveis



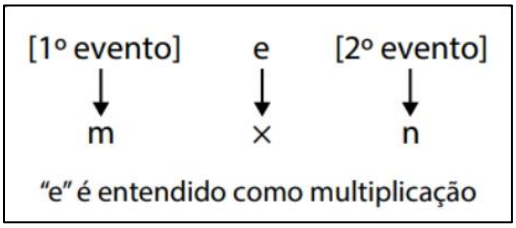
Fonte: A autora.

Para resolver situações como essa, podemos utilizar um dos Princípios Fundamentais da Contagem.

2.1 Princípio Multiplicativo

Um evento A tem *m* possíveis maneiras de ocorrer e outro evento independente B tem *n* maneiras possíveis de acontecer. Quando realizamos o primeiro evento, seguido do segundo, o número de maneiras possíveis dessa ocorrência é dado por $m \times n$.

Figura 3 - Princípio multiplicativo da contagem



Fonte: Araujo *et al* (2018).

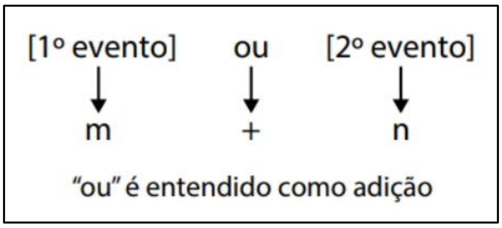
Retornando ao caso de Mike, podemos utilizar o princípio multiplicativo, pois precisamos escolher uma camisa **e** uma calça **e** um calçado. Temos 4 camisas, 3 calças e 2 calçados disponíveis. Assim, teremos:

$$\boxed{4 \times 3 \times 2 = 24 \text{ possibilidades}}$$

2.2 Princípio Aditivo

Um evento A tem *m* possíveis maneiras de ocorrer e outro evento B tem *n* maneiras possíveis de acontecer. Se os eventos não puderem ocorrer ao mesmo tempo, o número de possibilidades de termos um evento A **ou** um evento B é dado por m + n.

Figura 4 - Princípio multiplicativo da contagem



Fonte: Araujo *et al* (2018).

Mas quando podemos utilizar o princípio aditivo? Rosen (2010, p. 359) ilustra este princípio com o seguinte exemplo:

> Suponha que um membro da faculdade de matemática ou um estudante que tenha mestrado em matemática seja escolhido como representante para um comitê da Universidade. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas para esse representante se houver 37 membros da faculdade de matemática e 83 mestres em matemática e nenhum for ao mesmo tempo um membro da faculdade e um mestre?

Como a escolha é por um membro da faculdade OU por um estudante que tenha mestrado, teremos então que utilizar o princípio aditivo, pois não poderemos escolher os dois ao mesmo tempo. Sendo assim, como temos 37 membros e 83 mestres, teremos:

$$\boxed{37 + 83 = 120 \text{ escolhas}}$$

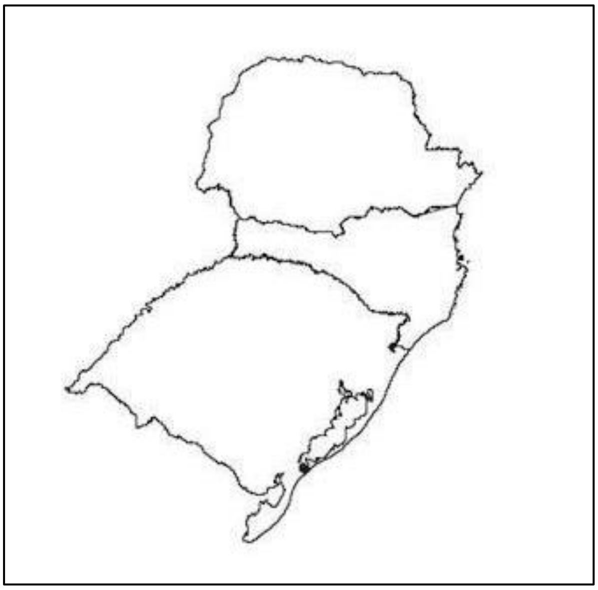
2.3 Princípio Misto (Aditivo e Multiplicativo)

Existe ainda, a possibilidade de misturar os princípios multiplicativo e aditivo em uma mesma situação. Assim, quando um problema se divide em casos disjuntos, use a multiplicação para contar cada caso individualmente e, então, use a adição para obter o total dos casos separados.

Por exemplo: De quantas formas diferentes é possível pintar o mapa da região sul do Brasil utilizando as cores azul, preto e vermelho (não é preciso necessariamente utilizar todas) de modo que estados vizinhos não sejam pintados com a mesma cor?

REVISTA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA DO IFSC

Figura 5 - Mapa dos estados da região Sul do Brasil



Fonte: Mundo da Geografia (2024).

Neste contexto, podemos dividir a resolução em dois casos:

1º Caso: utilizando apenas **duas cores**:

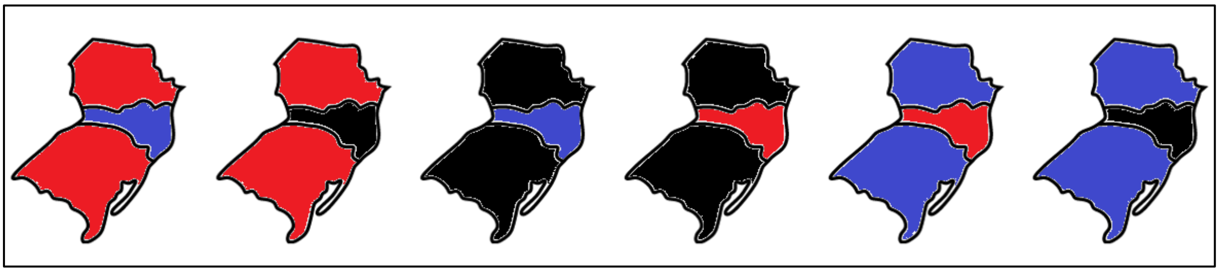
- Escolhe-se uma cor para PR e RS → 3 possibilidades

- Escolhe-se a cor para SC → 2 possibilidades

Assim:

$$\boxed{3 \times 2 = 6 \text{ possibilidades}}$$

Figura 6 - Ilustração do caso 1



Fonte: A autora.

2º Caso: utilizando todas as **três cores**:

- Escolhe-se uma cor para RS → 3 possibilidades

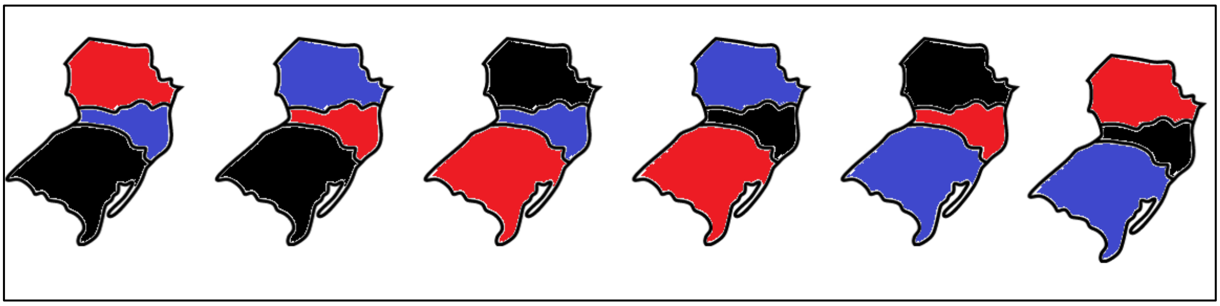
- Escolhe-se a cor para SC → 2 possibilidades

- Escolhe-se a cor para PR → 1 possibilidade

Assim:

$$\boxed{3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ possibilidades}}$$

Figura 7 - Ilustração do caso 2



Fonte: A autora.

Dessa forma, o total de configurações, pintando apenas com vermelho, azul ou preto, sem que estados vizinhos tenham a mesma cor, será:

$$\boxed{\text{Caso 1 ou Caso 2} = 6 + 6 = 12 \text{ possibilidades}}$$

2.4 Princípio da Inclusão e Exclusão

Uma tarefa A pode ser realizada de *n* ou *m* maneiras, porém algumas das maneiras do conjunto *n* são as mesmas de algumas das do conjunto *m*. Nesse caso, não podemos usar o princípio aditivo para contar o número de maneiras de realizar a tarefa.

> Adicionar o número de maneiras de realizar as tarefas nessas duas formas leva a uma contagem excessiva, porque as maneiras de realizar a tarefa naquelas formas que são idênticas serão contadas duas vezes. Para contar corretamente o número de maneiras para realizar as duas tarefas, somamos o número total de maneiras para realizá-la, e então subtraímos o número de maneiras de realizar a tarefa que pertence aos dois grupos. Esta técnica é chamada de **princípio da inclusão–exclusão**. (Rosen, 2010, p. 363)

Então, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Lipschutz e Lipson (2013, p.19) afirmam que "para encontrarmos o número de elementos em A e B (ou ambos) somando n(A) e n(B) (inclusão) e então subtraindo n (A ∩ B) (exclusão), uma vez que seus elementos foram contados duas vezes".

Vamos ver um exemplo do uso desse princípio na contagem:

Utilizando os algarismos de 1 a 9, quantas senhas de cinco algarismos distintos podemos formar, que iniciam com 1 ou terminam com 9? Para resolver esse problema, primeiro precisamos observar os elementos envolvidos:

Algarismos a serem utilizados: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 = 9 elementos

Destes, serão pegos 5 elementos – – – – –

Elementos distintos, significa que não haverá repetição dos elementos. Portanto, se iniciarmos com 1, o primeiro algarismo estará definido, precisaremos apenas definir os demais.

Na segunda posição temos 8 algarismos (8 possibilidades) para utilizar, já que o 1 foi utilizado na primeira posição. Na terceira, teremos 7, e assim por diante.

1 8p 7p 6p 5p = 8 x 7 x 6 x 5 = 1680

Terminados com 9: o último algarismo está definido. Na primeira posição temos 8 algarismos (8 possibilidades) para utilizar, já que o 9 foi utilizado na última posição. Na segunda teremos 7, e assim por diante.

8p 7p 6p 5p **9** = 8 x 7 x 6 x 5 = 1680

Porém, temos que observar que nos números iniciados por 1, podemos ter elementos que terminam também com 9, e o mesmo acontece nos números terminados em 9, podemos ter números iniciados por 1, portanto temos que realizar a exclusão desses elementos que foram contados duas vezes.

1 7p 6p 5p **9** = 7 x 6 x 5 = 210

Assim, o número de senhas criadas será 3150, pois:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ = 1680 + 1680 – 210 = 3150

2.5 Princípio da Casa dos Pombos

Se temos *n* casas que serão ocupadas por *n* + 1 ou mais pombos, então pelo menos uma casa será ocupada por mais de um pombo.

Segundo Rosen (2010, p.348), "o princípio da casa dos pombos é também chamado de Princípio das Gavetas de Dirichlet, depois que o matemático alemão Dirichlet usou frequentemente este princípio em seu trabalho, no século XIX". O autor acrescenta ainda que esse princípio auxilia na resolução de muitos outros problemas, tais como:

> Exemplo 1: Entre qualquer grupo de 367 pessoas, deverá existir ao menos duas com a mesma data de aniversário, porque há apenas 366 possíveis datas.
> Exemplo 2: Em qualquer grupo de 27 palavras em inglês, deverá haver pelo menos duas que começam com a mesma letra, pois há 26 letras no alfabeto da língua inglesa (Rosen, 2010, p.348).

Conclusão

Este texto possibilitou uma introdução aos princípios de contagem que dão início ao estudo de análise combinatória e probabilidades. É muito importante saber como utilizar os princípios multiplicativo e aditivo e, principalmente, identificar qual deles deverá ser utilizado em cada situação.

Referências

ARAUJO, Luciana M. M. *et al*. **Fundamentos de matemática**. Porto Alegre: SAGAH, 2018. E-book. ISBN 9788595027701. Disponível em: https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788595027701/. Acesso em: 15 jan. 2024.

LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc. **Matemática discreta**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. E-book. ISBN 9788565837781. Disponível em: https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788565837781/. Acesso em: 15 jan. 2024.

MUNDO DA GEOGRAFIA. **Mapas do Brasil e suas regiões para colorir**. Disponível em: https://mundodageografia.com.br/mapas-do-brasil-e-suas-regioes-para-colorir/. Acesso em: 15 jan. 2024.

ROSEN, Kenneth H. **Matemática discreta e suas aplicações**. 6. ed. Porto Alegre: AMGH, 2010. E-book. ISBN 9788563308399. Disponível em: https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788563308399/. Acesso em: 15 jan. 2024.