SISTEMAS LINEARES

Guilherme Rossi de Melo

Objetivos

Este material foi elaborado para que você possa:

- definir sistemas de equações lineares;
- identificar um sistema de equações lineares homogêneo;
- executar o método de eliminação de Gauss na resolução de um sistema de equações lineares.

Iniciando o estudo

Sistemas de equações lineares consistem em grupos de equações lineares que contêm múltiplas incógnitas ao mesmo tempo. Devido à simplicidade dos métodos de resolução em comparação com outros tipos de equações, esses sistemas são amplamente utilizados para estruturar e analisar dados.

1 Sistema de Equações Lineares

Uma **equação linear** nas variáveis $x_1, x_2, \dots x_n$ é uma equação que pode ser escrita na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

em que b e os coeficientes $a_1, a_2, \dots, a_n$ são **números reais** ou **complexos**, em geral já conhecidos. O índice n pode ser qualquer **inteiro positivo**.

Uma solução para a equação é uma sequência de n números $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ que tem a propriedade de que a equação é satisfeita quando $x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3, \dots, x_n = s_n$ são substituídos na equação.

Por exemplo, $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -4$ é uma solução para a equação linear $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13$ pois $6 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) = -13$.

Um sistema de **equações lineares** (ou um **sistema linear**) é uma coleção de uma ou mais equações lineares envolvendo as mesmas variáveis. Em particular, um sistema de m equações lineares $L_1, L_2, \dots, L_m$ nas n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ pode ser colocado na forma padrão abaixo:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

em que os a_{ij} e os b_i são **constantes**. O número a_{ij} é o ***coeficiente*** da incógnita x_j na equação L_i, e o número b_i é o ***termo constante*** dessa equação, chamando-o de um sistema $m \times n$ (lemos m por n).

Se o número m de equações for igual ao número n de incógnitas, ou seja, se $m = n$ o sistema é dito quadrado.

Se todos os seus termos constantes forem nulos, isto é, se $b_1 = 0, b_2 = 0, \dots, b_m = 0$ o sistema é **homogêneo**, caso contrário é dito **não homogêneo**.

Uma **solução** (ou **solução particular**) de um sistema é uma lista de valores para as incógnitas ou, de modo seja uma solução de cada uma das equações do sistema. O conjunto de todas as soluções do sistema é denominado conjunto solução ou solução geral do sistema. Vejamos o exemplo:

1) Verifique se (a) e (b) são soluções para o sistema 3×4 abaixo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 10 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 7 \end{cases}$$

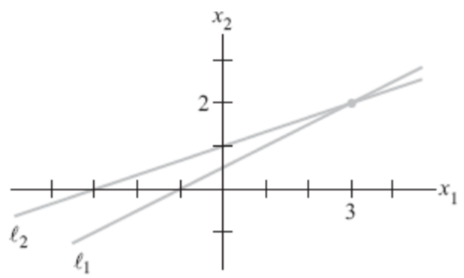
(a) $(1, 2, 5, 0)$

(b) $(0, -3,1,1)$

O conjunto de todas as soluções possíveis é conhecido como **conjunto solução** do sistema linear. Dois sistemas lineares são chamados **equivalentes** se tiveram o mesmo conjunto solução, ou seja, cada solução do primeiro sistema é uma solução do segundo sistema, e cada solução do segundo sistema é uma solução do primeiro.

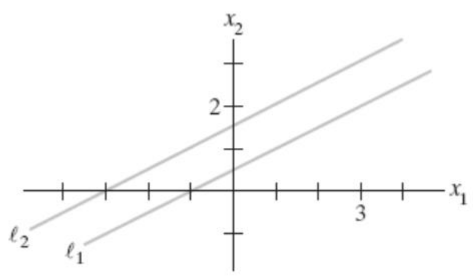
Um sistema linear de duas equações é um exemplo bom para visualizar e determinar o conjunto solução de sistema linear, porque isso é equivalente a determinar a interseção de duas retas. Vejamos três exemplos de Lay *et al.* (2024) abaixo:

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$



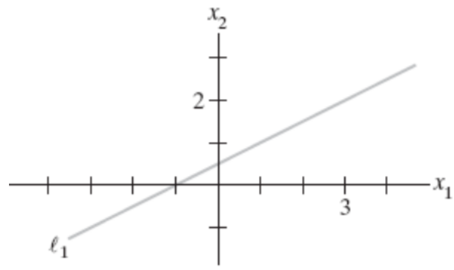
Esse sistema tem somente uma solução (intersecção das retas), sendo o par (3,2).

b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$



Esse sistema não tem solução (retas paralelas).

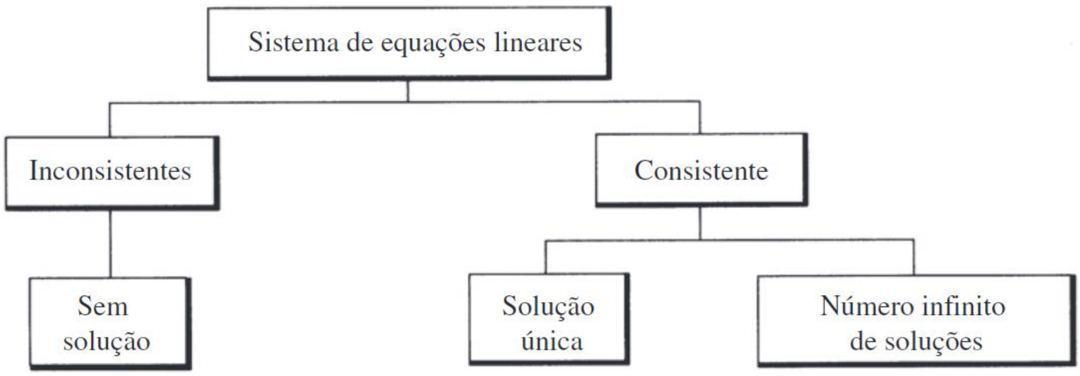
c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$



Esse sistema tem uma infinidade de soluções (retas coincidentes).

Dizemos que um sistema linear é **consistente** se tiver **uma solução** ou **infinitas soluções**; um sistema é **inconsistente** ou **impossível** se não tiver nenhuma solução.

Figura 1 – Classificação dos Sistemas Lineares



Fonte: Lipschutz e Lipson (2011)

Se $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_n = 0$, então o sistema é chamado **homogêneo** e sempre terá a solução $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$, chamada **solução trivial**. O sistema homogêneo poderá ter outras soluções não triviais.

2 Resolução de Sistemas Lineares

Quando consideramos métodos para resolver sistemas de equações lineares, é importante distinguir entre sistemas grandes, que precisam ser resolvidos por computador, e sistemas pequenos, que podem ser resolvidos a mão. Por exemplo, há muitas aplicações que levam a sistemas em milhares e até milhões de incógnitas. Esses sistemas grandes requerem técnicas especiais para tratar dos problemas de tamanho de memória, erros de arredondamento, tempo de solução e assim por diante.

Em situações envolvendo sistemas com apenas duas equações lineares de duas variáveis, a solução pode ser obtida de forma direta (método de soma e substituição). A partir de uma das equações, escreve-se uma relação que define uma variável em função da outra e, então, substitui-se essa relação na segunda equação, o que permite determinar uma das variáveis e, depois, a outra. Veja os exemplos de Larson (2017) abaixo e responda: qual sistema é mais fácil de resolver algebricamente?

a) $$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y \qquad = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

O sistema (b) é claramente mais fácil de resolver. Esse sistema está na forma **escalonada** por linhas, o que significa que ele está em um padrão "degraus de escada" com coeficientes principais iguais a 1. Para resolver um desses sistemas, usamos a **substituição regressiva**.

Sabendo que $z = 2$, substituindo em $y + 3z = 5$, temos $y + 3 \cdot 2 = 5$, ou seja, $y = -1$. Substituindo y e z na primeira equação, temos $x - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 9$, resultando em $x = 1$. Portanto o conjunto solução é o trio $(1, -1, 2)$.

Dois sistemas de equações lineares são equivalentes quando eles têm o mesmo conjunto solução. Para resolver um sistema que não esteja na forma escalonada por linha, ou para um sistema do tipo 3 × 3 e sistemas de equações lineares maiores, torna-se necessária a utilização de um método que forneça um procedimento operacional bem-definido, a fim de que a obtenção da solução para qualquer tipo de sistema seja padronizada.

3 Método de Eliminação de Gauss

O método de eliminação de Gauss consiste em substituir um dado sistema de equações lineares por outro equivalente, que seja mais simples de ser solucionado e que tenha a mesma solução do sistema original. Isso pode ser feito por meio de três tipos de operações matemáticas que visam a eliminar variáveis.

a) Multiplicar uma equação por uma constante
b) Trocar de posição duas equações entre si
c) Somar um múltiplo de uma equação a uma outra equação

Estas operações são chamadas **operações elementares.** É importante observar que as operações elementares são *reversíveis*. Se duas linhas forem trocadas, poderão retornar às suas posições originais por meio de outra troca. Se uma linha for escalonada por uma constante não nula c, então multiplicando a nova linha por $\frac{1}{c}$ obteremos a linha original.

Vejamos um exemplo resolvido de Larson (2017):

Resolva o sistema $\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y \quad\quad = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$

Embora existam diversas maneiras de começar, você gostaria de usar um procedimento sistemático que possa ser aplicado a sistemas maiores. Trabalhe a partir do canto esquerdo de cima do sistema, mantendo o x no canto esquerdo de cima e eliminando os outros termos em x da primeira coluna.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$$

(*somar a primeira equação à segunda equação produz uma nova segunda equação*)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ y + 3z = 5 \\ -y - z = -1 \end{cases}$$

(*somar por -2 a primeira equação multiplicada por -2 à terceira equação produz uma nova terceira equação*)

Agora que você eliminou todos, exceto o primeiro x da primeira coluna, trabalhe na segunda coluna.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ \quad\quad y + 3z = 5 \\ \quad\quad\quad 2z = 4 \end{cases}$$

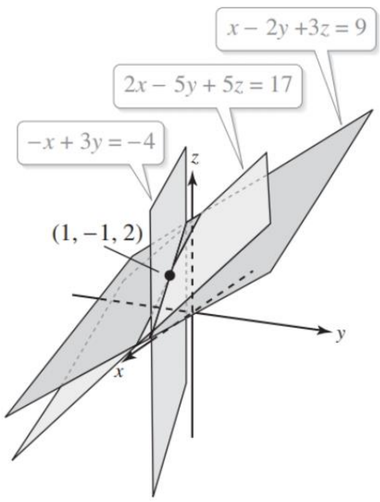
(*somar a segunda equação à terceira equação produz uma nova terceira equação*)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ \quad\quad y + 3z = 5 \\ \quad\quad\quad z = 2 \end{cases}$$

(*multiplicar a terceira equação por* $\frac{1}{2}$ *produz uma nova terceira equação*)

Cada uma das três equações no exemplo representa um plano em um sistema de coordenadas tridimensional. A solução única do sistema é o ponto $(x, y, z) = (1, -1, 2)$, de modo que os planos se interceptam nesse ponto, como mostrado na figura abaixo:

Figura 2 – Solução geométrica do sistema linear exemplificado



Fonte: Larson (2017)

O próximo exemplo envolve um sistema inconsistente – um que não tem nenhuma solução. A chave para reconhecer um sistema inconsistente é que, em algum estágio do processo de eliminação de Gauss, você obtém uma afirmação falsa, tal como $0 = -2$.

Resolva o exemplo abaixo e verifique a inconsistência do sistema.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x - y - 2z = 2 \\ x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

Agora verifique que o sistema de equações lineares abaixo tenha infinitas soluções.

$$\begin{cases} \quad y - z = 0 \\ x \qquad - 3z = -1 \\ -x + 3y \qquad = 1 \end{cases}$$

Tente obter como resultado um sistema com parâmetro t de forma que

$x = 3t - 1, y = t, z = t, onde\ t$ é $qualquer\ número\ real.$

Referências

LAY, David C.; LAY, Steven R.; MCDONALD, Judi J. **Álgebra Linear e Suas Aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2024. *E-book*. ISBN 9788521638803. Disponível em: https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521638803/.

LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc Lars. **Álgebra linear**. Bookman, 2011.

LARSON, Ron. **Elementos de álgebra linear:** Tradução da 8ª edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning Brasil, 2017. E-book. ISBN 9788522127238. Disponível em: https://app.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788522127238/.