NÚMEROS IRRACIONAIS E NÚMEROS REAIS

Gustavo Camargo Bérti

Objetivos

Este material foi produzido a fim de que você possa:

- compreender a necessidade da utilização de números irracionais;
- utilizar e justificar o processo de arredondamento;
- entender o conjunto dos números reais enquanto união dos racionais e irracionais.

Iniciando o estudo

Os números irracionais fundamentam-se na ideia de que nem todos os números na forma decimal podem ser representados na forma de fração com numerador e denominador sendo números inteiros, ou seja, o conjunto dos números racionais não basta para expressar todos os números. Neste estudo vamos tratar do conjunto dos números irracionais, que unido ao conjunto dos números racionais forma um conjunto maior, dos números reais, que dá conta de (quase) todas as questões numéricas abordadas na escola básica e aplicadas às demais áreas.

1 Números irracionais

Os números racionais são todos aqueles que podem ser escritos na forma da fração irredutível $\frac{a}{b}$, sendo o numerador qualquer número inteiro e o denominador um inteiro não nulo, tais que $mdc(a,b)=1$. Mas será que todos os números podem ser escritos dessa forma?

A resposta para a pergunta acima é **não**, e vamos pensar no seguinte exemplo para justificar:

Existe um número racional x tal que $x^2=3$?

Note que se x fosse racional, teríamos $x = \frac{a}{b}$ (fração irredutível) e $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 3$, portanto teríamos $a^2 = 3 \cdot b^2$, o que implica que a^2 é múltiplo de 3, e por consequência a também é múltiplo de 3 (é possível demonstrar o último fato). Por outro lado, $\frac{a^2}{3} = b^2$ e pelo fato anterior ($a = 3k$, sendo k um número natural) podemos escrever $\frac{(3k)^2}{3} = b^2$, ou desenvolvendo, $3k^2 = b^2$, o que implica que b^2 é múltiplo de 3, e por consequência b também é múltiplo de 3. Sendo assim, $mdc(a,b) \neq 1$, visto que ambos são múltiplos de 3, o que prova que não existe uma fração irredutível $x = \frac{a}{b}$ tal que $x^2 = 3$, ou seja, x não é um número racional.

Entretanto, é possível pensar uma solução para $x^2 = 3$ via análise empírica:

$$x = 1 \ \Rightarrow \ x^2 = 1$$
$$x = 1{,}5 \ \Rightarrow \ x^2 = 2{,}25$$
$$x = 1{,}7 \ \Rightarrow \ x^2 = 2{,}89$$
$$x = 1{,}75 \ \Rightarrow \ x^2 = 3{,}0625$$
$$x = 1{,}73 \ \Rightarrow \ x^2 = 2{,}9929$$
$$x = 1{,}74 \ \Rightarrow \ x^2 = 3{,}0625$$
$$x = 1{,}735 \ \Rightarrow \ x^2 = 3{,}010225$$
$$x = 1{,}732 \ \Rightarrow \ x^2 = 2{,}999824$$

Podemos seguir o processo infinitamente, mas nunca encontramos um número racional tal que $x^2 = 3$. O que sabemos até agora é que x é um número entre $1{,}732$ e $1{,}735$ e, conforme continuamos o processo, melhor a aproximação para x. Sendo assim, é possível perceber que x tem expansão decimal infinita e não periódica. Surge então a necessidade de um conjunto para englobar todos os números que têm essa característica.

O conjunto dos números irracionais, representado por $\mathbb{I}$, contempla os números cuja representação decimal é infinita e não periódica. Também é possível definir o conjunto como aquele que contempla todos os números que não podem ser escritos na forma da fração irredutível $\frac{a}{b}$, sendo a e b inteiros e $b \neq 0$. Note que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \{\ \ \}$.

Alguns exemplos de números irracionais:

- Todas as raízes do tipo $\sqrt[n]{r}$ tais que $r \neq \frac{a^n}{b^n}$, por exemplo $\sqrt{7}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{\frac{9}{10}}$;
- Algumas constantes como π (pi), e (número de Euler) e Φ (número de ouro);

- Números construídos com infinitas casas decimais, utilizando algum padrão que garante a inexistência de período, como, por exemplo, em 2,01001000100001000001… (seguindo o padrão de um zero a mais em cada bloco que termina em 1);
- A maior parte das imagens das funções trigonométricas, por exemplo $sen(1)$, $cos(5)$, $tg(4)$;
- A soma e o produto de um número racional e um número irracional, por exemplo $1+\sqrt{2}, 3\pi, -2-\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{e}{2}$.

1.1 Arredondamento

É errado escrever $\sqrt{3}=1{,}732$, pois se isso fosse verdade teríamos $\sqrt{3}=\frac{1732}{1000}$ e, em razão disso, $\sqrt{3}$ seria um número racional. O correto é escrever $\sqrt{3} \approx 1{,}732$, pois trata-se de uma aproximação, visto que há infinitas casas na expansão decimal de $\sqrt{3}$. De fato, na calculadora científica, o valor informado para $\sqrt{3}$ é $1{,}732050808$, que é o valor arredondado utilizando o número máximo de casas decimais que o visor pode mostrar.

Para fazer o arredondamento de um número irracional ou um racional com muitas casas decimais em n casas decimais, olhamos para a casa decimal n+1 e utilizamos os seguintes critérios:

- Se o dígito na casa n+1 é maior que 5, aumentamos em uma unidade o dígito da casa n. Por exemplo, arredondando $cos(5)$ em três casas decimais, temos $cos(5) \approx 0{,}284$, pois o dígito na quarta casa decimal é 6 (maior que 5), visto que o valor que aparece na tela da calculadora é $0{,}283662185$;
- Se o dígito na casa n+1 é menor que 5, mantemos o dígito da casa n. Por exemplo, arredondando $\sqrt{3}$ em três casas decimais, temos $\sqrt{3} \approx 1{,}732$, pois o dígito na quarta casa decimal é 0 (menor que 5), visto que o valor que aparece na tela da calculadora é $1{,}732050808$;
- Se o dígito na casa n+1 é 5, aumentamos em uma unidade o dígito da casa n, exceto quando o dígito 5 da casa n+1 é o último dígito não nulo (nesse caso, o número a ser arredondado é racional). Por exemplo, arredondando π em casas

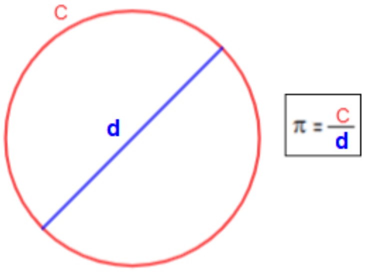
decimais, temos $\pi \approx 3{,}142$, pois o dígito na quarta casa decimal é 5 e há dígitos após, visto que aparece na tela da calculadora $3{,}141592654$. Já o arredondamento do número racional $6{,}7765$ em três casas decimais é $6{,}776$, considerando que o dígito 5 da quarta casa decimal é o último.

1.2 Obtenção de alguns números irracionais

Vejamos alguns exemplos de números irracionais que são obtidos via procedimento construtivo:

Exemplo 1: Em qualquer círculo, a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro é a constante π, conforme ilustrado na Figura 1.

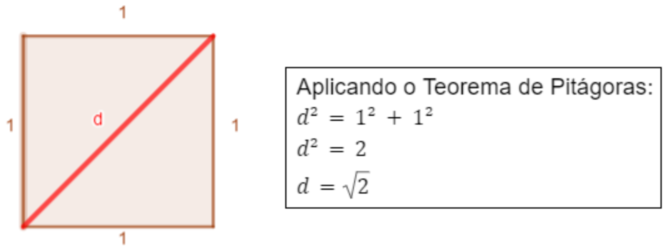
Figura 1 - Obtenção da constante π



Fonte: Elaborado pelo autor

Exemplo 2: A diagonal de um quadrado de lado $1\ u.c.$ mede $\sqrt{2}\ u.c.$, conforme a Figura 2.

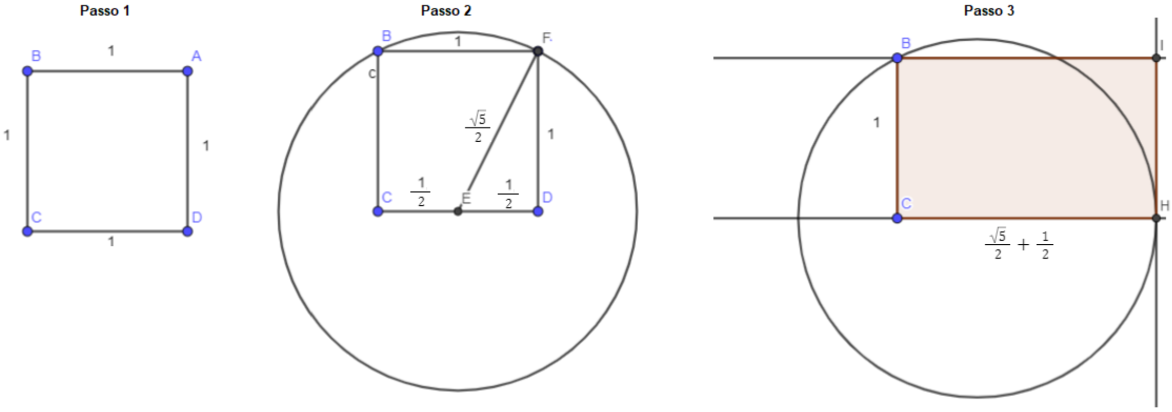
Figura 2 - Diagonal de um quadrado de lado $1\ u.c.$



Fonte: Elaborado pelo autor

Exemplo 3: O processo construtivo na Figura 3 mostra a obtenção de $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, o número de ouro, correspondente à razão entre os lados maior e menor do retângulo áureo (marrom).

Figura 3 - Construção do retângulo áureo

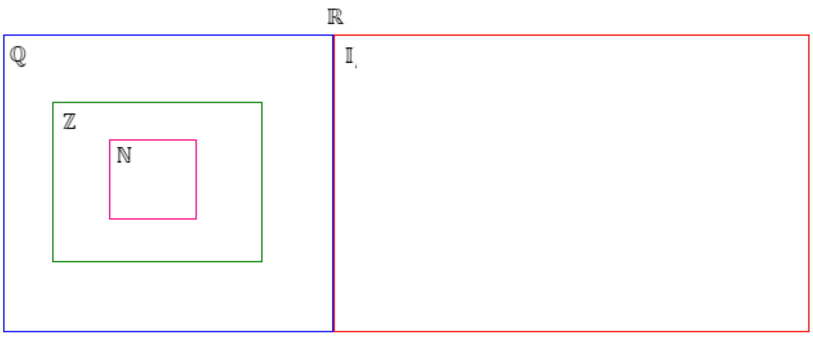


Fonte: Elaborado pelo autor

2 Números reais

O conjunto dos números reais, representado por $\mathbb{R}$, corresponde à união dos conjuntos dos números racionais e dos irracionais ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$), o que pode ser representado pelo diagrama de conjuntos numéricos da Figura 4.

Figura 4 - Diagrama de conjuntos numéricos



Fonte: Elaborado pelo autor

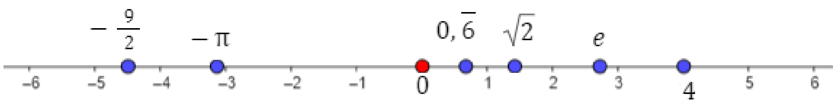
No conjunto dos números reais, as quatro operações básicas (adição, multiplicação, subtração e divisão) estão bem definidas, ou seja, operando dois números reais o resultado também o é.

Outros fatos importantes são o estabelecimento da relação de ordem (dados dois números reais distintos, sempre é possível decidir qual é o maior) e a propriedade da densidade (dados dois números reais distintos, há infinitos números reais entre eles).

2.1 Reta real

Podemos dispor os infinitos números reais em uma reta numérica. Para tal, é preciso estabelecer uma unidade de graduação, o zero como origem e posicionar à direita da origem os números positivos e à esquerda os números negativos, conforme ilustra a Figura 5.

Figura 5 - Reta real e posicionamento de alguns números reais



Fonte: Elaborado pelo autor

2.2 Módulo

O módulo de um número real é a distância entre o ponto que o representa e o ponto de origem da reta real. Para sinalizar que queremos o módulo de um número real, utilizamos a notação | |. Observando a Figura 5, temos que:

$$\left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2} \qquad |-\pi| = \pi \qquad |0,\underline{6}| = 0,\underline{6} \qquad |\sqrt{2}| = \sqrt{2} \qquad |e| = e$$

2.3 Intervalos de números reais

Um intervalo de números reais é um "pedaço" da reta real, ou seja, um subconjunto dos números reais que contém infinitos números.

Para simbolizar que uma extremidade pertence ao intervalo, utilizamos o colchete para dentro, caso contrário utilizamos o colchete para fora. Por exemplo, $\left[\frac{-9}{2}, 4\right]$ é o intervalo que contém todos os números reais maiores ou iguais a $\frac{-9}{2}$ e menores ou iguais a 4, já $]0, e]$ é o intervalo que contém os números maiores que 0 e menores ou iguais a e.

Os intervalos podem ser ilimitados superior ou inferiormente. Por exemplo, $]-\infty, \sqrt{2}[$ é o intervalo que contém todos os números reais menores que $\sqrt{2}$, já $[4, +\infty[$ contém todos os números reais maiores ou iguais a 4.

Como os intervalos são conjuntos numéricos, podemos realizar as operações de união, intersecção e diferença. Por exemplo:

- $]-\infty, \sqrt{2}\,[\, \cup \,]0, e] =]-\infty, e]$
- $]-\infty, \sqrt{2}[\, \cap \,]0, e] =]0, \sqrt{2}[$
- $]-\infty, \sqrt{2}[\, - \,]0, e] =]-\infty, 0]$
- $]0, e] - \,]-\infty, \sqrt{2}[= [\sqrt{2}, e]$

Concluindo o estudo

Com este estudo você está apto a compreender a plenitude dos números reais quanto às quatro operações básicas e quanto à relação entre a representação de cada número como um ponto na reta real. Todavia, é preciso perceber que tal conjunto são satisfaz todas as questões da matemática, como, por exemplo, a solução para a equação $x^2 = -3$, que será resolvida com a ampliação do conjunto dos números reais ocasionada pela noção de número complexo. Ao se deparar com questões como essa, sugere-se que não se utilize a expressão ‘’não há solução no conjunto dos números reais” em detrimento a simplesmente “não há solução”.

Referências utilizadas para a elaboração deste material

GIACOMO, S. R. **Números irracionais**. Disponível em: <http://mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/reais-web/irrac.pdf>. Acesso em: 22 dez. 2022.

GIMENEZ, C. S. C. **Introdução ao Cálculo**. 2. ed. Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2010. Disponível em: <https://mtmgrad.paginas.ufsc.br/files/2014/04/Introdu%C3%A7%C3%A3o-ao-C%C3%A1lculo.pdf>. Acesso em: 22 dez. 2022.

REMAT. **Conjunto dos números reais**. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/reamat/PreCalculo/livro/cn-conjunto_dos_numeros_reais.html>. Acesso em: 22 dez. 2022.