NÚMEROS RACIONAIS

Gustavo Camargo Bérti

Objetivos

Este material foi elaborado para que você seja capaz de:

- reconhecer as diferentes formas de representação de um mesmo número racional;
- fazer operações entre números racionais e justificar os procedimentos de cálculo.

Iniciando o estudo

Os números racionais fundamentam-se na ideia de que o conjunto dos números inteiros não é suficiente para expressar todos os possíveis resultados da divisão de dois números inteiros. Cada número racional pode ser representado na forma de fração e na forma de número decimal e, em cada um desses formatos, há infinitas representações para o mesmo número. Essa possibilidade de multiplicidade de representações talvez seja um fator que colabore para a incompreensão de parte dos estudantes sobre conceitos que envolvem números dessa natureza. Neste estudo vamos abordar as diferentes formas de representação e as operações, a fim de que você possa trabalhar questões relativas ao conjunto dos números racionais com clareza na futura prática docente.

1 Ideias fundamentais

Vamos considerar os números inteiros a e b escolhidos aleatoriamente, e a equação $bx = a$. Note que:

- Se $b = 0$, a equação não pode ser resolvida, pois o lado esquerdo da igualdade resulta em 0 independendemente do valor de x, e o lado direito (a) não é necessariamente 0;

- Se a é múltiplo de b, então x é um número inteiro;
- Se a é não é múltiplo de b, então x não é um número inteiro, e nesse caso dizemos que x é um número racional e o representamos na forma $\frac{a}{b}$

O **conjunto dos números racionais** (representado por $\mathbb{Q}$) engloba todos os números escritos na forma $\frac{a}{b}$, tais que a e b são ambos números inteiros e $b \neq 0$.

Note que $\mathbb{Z}$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}$, pois se $b = 1$, temos:

$$x = a \Rightarrow 1 \cdot x = a \Rightarrow x = \frac{a}{1}$$

$\frac{a}{b}$ é a forma fracionária do número racional x, onde a é chamado de numerador e b é chamado de denominador. O mesmo número racional x também pode ser representado na forma decimal (número com vírgula).

2 Números racionais na forma fracionária

Nesta seção vamos abordar os números racionais expressos na forma de fração.

2.1 Frações equivalentes

Como visto anteriormente, o número racional x é a solução da equação $bx = a$, sendo a e b números inteiros e $b \neq 0$. Note que ao multiplicar ambos os lados da equação por um número inteiro não nulo c, estamos obtendo uma equação equivalente:

$$cbx = ca$$

Sendo assim, temos que a solução da equação, x, pode ser escrita de infinitas maneiras, visto que c pode ser qualquer número inteiro não nulo.

$$x = \frac{a}{b} = \frac{ca}{cb}$$

Todas as infinitas frações do tipo $\frac{ca}{cb}$ são representantes para o mesmo número racional x. Tais frações são um conjunto de frações equivalentes. Seguem alguns exemplos:

- $\frac{8}{10}, \frac{16}{20}, \frac{36}{45}, \frac{-400}{-500}$ são frações equivalentes a $\frac{4}{5}$;
- $\frac{-30}{10}, \frac{45}{-15}, \frac{-300}{100}, \frac{-9}{3}$ são frações equivalentes a $\frac{-3}{1} = -3$.

2.2 Simplificação de frações

Dada uma fração $\frac{a}{b}$, podemos "simplificá-la" obtendo uma fração equivalente pela divisão do numerador e do denominador pelo mesmo número inteiro não nulo c, de forma a obter uma nova fração em que numerador e denominador são ambos inteiros. Por exemplo:

- Podemos simplificar a fração $\frac{72}{90}$ dividindo numerador e denominador por 2, obtendo a fração equivalente $\frac{36}{45}$. Agora podemos fazer uma nova simplificação dividindo numerador e denominador por 9, obtendo a fração equivalente $\frac{4}{5}$ (observe que agora não é mais possível dividir numerador e denominador pelo mesmo inteiro de forma a obter uma nova fração com numerador e denominador inteiros).
- Podemos simplificar a fração $\frac{-75}{25}$ dividindo numerador e denominador por 5, obtendo a fração equivalente $\frac{-15}{5}$. Agora podemos fazer uma nova simplificação dividindo numerador e denominador novamente por 5, obtendo a fração equivalente $\frac{-3}{1}$ (observe que agora não é mais possível dividir numerador e denominador pelo mesmo número inteiro de forma a obter uma nova fração com numerador e denominador inteiros e que $\frac{-3}{1}$ corresponde ao número inteiro -3).

Alguns fatos importantes:

- Podemos fazer uma etapa única de simplificação ao dividirmos numerador e denominador pelo máximo divisor comum de ambos (mdc). Por exemplo, como $mdc(72,90) = 18$, temos que $\frac{72}{90} = \frac{72 \div 18}{90 \div 18} = \frac{4}{5}$; e de forma análoga $mdc(75,25) = 25$, logo $\frac{-75}{25} = \frac{-75 \div 25}{25 \div 25} = \frac{-3}{1} = -3$.
- Se na fração $\frac{a}{b}$ temos $mdc(a,b) = 1$, dizemos que $\frac{a}{b}$ é uma **fração irredutível**. Como exemplos de frações irredutíveis temos $\frac{4}{5}, \frac{-3}{1}, \frac{24}{17}, \frac{93}{-45}, \frac{-100}{2391}, \ldots$

2.3 Frações decimais

Toda fração cujo denominador é uma potência de 10 é uma fração decimal, como, por exemplo, $\frac{3}{10}$, $\frac{42}{100}$ e $\frac{1342}{1000}$. Alguns números racionais têm como representante uma fração decimal (fração equivalente) e outros não, por exemplo:

- $\frac{8}{5}$ também pode ser representado pela fração decimal $\frac{16}{10}$;
- $\frac{17}{40}$ também pode ser representado pela fração decimal $\frac{425}{1000}$;
- Não há fração decimal que sirva de representante para o número racional $\frac{5}{6}$.

Note que os números racionais só podem ser representados por uma fração decimal quando a decomposição do denominador em fatores primos tem apenas potências de 2 e de 5. O multiplicador para obtenção da fração decimal é do tipo $2^m \cdot 5^n$, sendo m e n os números naturais que fazem com que a multiplicação pelo denominador seja uma potência de 10. Por exemplo:

- Em $\frac{8}{5}$, a decomposição em fatores primos do denominador é 5^1, portanto o multiplicador é 2^1, pois $5^1 \cdot 2^1 = 10^1$, assim $\frac{8}{5} = \frac{8 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{16}{10}$;
- Em $\frac{17}{40}$, a decomposição em fatores primos do denominador é $2^3 \cdot 5^1$, portanto o multiplicador é 5^2, pois $5^2 \cdot 2^3 \cdot 5^1 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$, assim $\frac{17}{40} = \frac{17 \cdot 5^2}{40 \cdot 5^2} = \frac{425}{1000}$;
- Em $\frac{5}{6}$, a decomposição em fatores primos do denominador é $2 \cdot 3$, portanto não há multiplicador natural que torne possível obter uma fração equivalente com o denominador sendo uma potência de 10.

2.4 Operações

As operações básicas envolvendo frações utilizam os conceitos previamente abordados. É importante entender os procedimentos do cálculo para que não se tenha uma mera reprodução de algoritmos, sem a devida vinculação conceitual.

2.4.1 Adição

A adição de frações utiliza a ideia de fração como relação parte/todo, sendo o denominador a quantidade de divisões em partes iguais de um todo e o numerador a quantidade de partes a serem consideradas. Tal operação consiste em “juntar” pedaços de um mesmo todo, e para que isso ocorra, precisamos que os pedaços tenham o mesmo tamanho, ou seja, que ambas as frações tenham o mesmo denominador, o que sempre será possível através do processo de obtenção de frações equivalentes:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

Exemplos de aplicação dessa ideia:

- $\frac{3}{7}+\frac{5}{3}=\frac{3\cdot3}{7\cdot3}+\frac{5\cdot7}{3\cdot7}=\frac{9}{21}+\frac{35}{21}=\frac{9+35}{21}=\frac{44}{21}$
- $\frac{3}{7}+\left(\frac{-5}{7}\right)=\frac{3+(-5)}{7}=\frac{-2}{7}$
- $\frac{3}{7}+\frac{5}{14}=\frac{3\cdot14}{7\cdot14}+\frac{5\cdot7}{14\cdot7}=\frac{42}{98}+\frac{35}{98}=\frac{42+35}{98}=\frac{77}{98}=\frac{77\div7}{98\div7}=\frac{11}{14}$

Algumas constatações importantes:

- Se os denominadores das parcelas são iguais, basta somar os numeradores;
- Podemos obter frações equivalentes cujo denominador é o menor múltiplo comum dos denominadores. Tal processo nos permite operar com “frações mais simples”. Por exemplo, como $mmc(7,14)=14$, temos que $\frac{3}{7}+\frac{5}{14}=\frac{3\cdot2}{7\cdot2}+\frac{5}{14}=\frac{6}{14}+\frac{5}{14}=\frac{6+5}{14}=\frac{11}{14}$.
- O fato imediatamente acima é utilizado na escola básica como algoritmo para a adição de frações.

2.4.2 Subtração

A subtração de números racionais $x-y$ é equivalente à soma de x com o oposto de y, pois se o número racional y é positivo (aplicando a regra de sinais da divisão “numerador/denominador”), então seu oposto é negativo, e vice-versa. Seguem alguns exemplos:

- $\frac{3}{7}-\frac{5}{3}=\frac{3}{7}+\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{3\cdot 3}{7\cdot 3}+\left(-\frac{5\cdot 7}{3\cdot 7}\right)=\frac{9}{21}+\left(-\frac{35}{21}\right)=\frac{9+(-35)}{21}=\frac{-26}{21}$
- $\frac{3}{7}-\left(\frac{-5}{7}\right)=\frac{3}{7}+\left(\frac{+5}{7}\right)=\frac{3+(+5)}{7}=\frac{8}{7}$
- $\frac{3}{7}-\frac{5}{14}=\frac{3}{7}+\left(-\frac{5}{14}\right)=\frac{3\cdot 2}{7\cdot 2}+\left(-\frac{5}{14}\right)=\frac{6}{14}+\left(-\frac{5}{14}\right)=\frac{6+(-5)}{14}=\frac{1}{14}$

2.4.3 Multiplicação

Sejam os números racionais x e y soluções das equações $bx=a$ e $dy=c$, tais que a, c,b e d são todos números inteiros e os dois últimos não são nulos. Multiplicando as igualdades membro a membro, obtemos uma nova igualdade:

$$bx\cdot dy=a\cdot c\ \Rightarrow\ bd\cdot xy=ac\ \Rightarrow\ xy=\frac{ac}{bd}$$

Observe que a última igualdade nos fornece um método prático para a multiplicação dos números racionais $x=\frac{a}{b}$ e $y=\frac{c}{d}$, assim obtemos uma fração cujo numerador é o produto dos numeradores e o denominador é o produto dos denominadores, como pode ser visto nos seguintes exemplos:

- $\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{3}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 3}=\frac{15}{21}=\frac{15\div 3}{21\div 3}=\frac{5}{7}$
- $\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{-5}{7}\right)=\frac{3\cdot(-5)}{7\cdot 7}=\frac{-15}{49}$
- $-\frac{8}{7}\cdot\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{-8\cdot(-5)}{7\cdot 12}=\frac{40}{84}=\frac{40\div 4}{84\div 4}=\frac{10}{21}$

Alguns fatos importantes:

- Podemos fazer simplificações no começo do cálculo para operar “números menores”. Por exemplo, em $\frac{3\div 3}{7}\cdot\frac{5}{3\div 3}=\frac{1\cdot 5}{7\cdot 1}=\frac{5}{7}$ e em $-\frac{8\div 4}{7}\cdot\left(-\frac{5}{12\div 4}\right)=\frac{-2\cdot(-5)}{7\cdot 3}=\frac{10}{21}$.
- Quando o produto de duas frações é 1 (elemento neutro da multiplicação), temos que uma é o inverso multiplicativo da outra. Por exemplo, $\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{3}=\frac{3\cdot 7}{7\cdot 3}=1$, portanto $\frac{7}{3}$ é o inverso multiplicativo de $\frac{3}{7}$ e vice-versa. Genericamente, o **inverso multiplicativo** da fração $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$.

2.4.4 Divisão

Observe que a divisão de números inteiros é equivalente à multiplicação do dividendo pelo inverso multiplicativo do divisor, por exemplo:

$$14 \div 7 = \frac{14}{1} \div \frac{7}{1} = \frac{14}{1} \cdot \frac{1}{7} = \frac{14}{7} = \frac{2}{1} = 2$$

Podemos estender a ideia para a divisão de números racionais:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Seguem alguns exemplos de divisão de números racionais:

- $\frac{3}{7} \div \frac{5}{3} = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{35}$
- $\frac{3}{7} \div \left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{-7}{5}\right) = \frac{-3}{5}$
- $-\frac{8}{7} \div \left(-\frac{5}{12}\right) = -\frac{8}{7} \cdot \left(-\frac{12}{5}\right) = \frac{96}{35}$

3 Números racionais na forma decimal

A representação decimal de um número racional (representação com vírgula) permite que todo número racional seja escrito como uma lista envolvendo algarismos (dígitos). Para tal, utilizamos o seguinte fato:

Todo número racional positivo $\frac{a}{b}$ pode ser escrito como na forma $k + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots$ sendo k um número natural e $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Note que $\frac{a_1}{10^1} = 0, a_1$; $\frac{a_2}{10^2} = 0{,}0a_2$; $\frac{a_3}{10^3} = 0{,}00a_3$ e assim sucessivamente, portanto temos:

$$\frac{a}{b} = k + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots$$

$\frac{a}{b} = k, a_1a_2a_3\ldots$ (representação decimal de $\frac{a}{b}$)

Algumas observações:

- Para um número racional negativo $\frac{a}{b}$, temos $\frac{a}{b} = -\left(k + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots\right)$;

- Os números racionais podem ter representação decimal finita ou representação decimal infinita e periódica.

3.1 Representação decimal finita

Todas as frações que podem ser escritas como uma fração decimal equivalente têm representação decimal finita. Utilizamos frações equivalentes (multiplicador 10) e o algoritmo de Euclides para possibilitar a escrita da fração na forma de soma de frações que permite a visualização da forma decimal, conforme ilustra o exemplo a seguir:

- $$\begin{aligned}
\frac{17}{40} &= \frac{1}{10}\cdot\frac{17}{4}\\
&= \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{16}{4}+\frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{1}{10}\cdot\left(4+\frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{1}{10}\cdot\left(4+\frac{10}{40}\right)\\
&= \frac{1}{10}\cdot\left(4+\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{10}{4}\right)\right)\\
&= \frac{1}{10}\cdot\left(4+\left(\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{8}{4}+\frac{2}{4}\right)\right)\right)\\
&= \frac{1}{10}\cdot\left(4+\left(\frac{1}{10}\cdot\left(2+\frac{2}{4}\right)\right)\right)\\
&= \frac{1}{10}\cdot\left(4+\left(\frac{1}{10}\cdot\left(2+\frac{20}{40}\right)\right)\right)\\
&= \frac{1}{10}\cdot\left(4+\left(\frac{1}{10}\cdot\left(2+\frac{1}{10}\cdot\frac{20}{4}\right)\right)\right)\\
&= \frac{1}{10}\cdot\left(4+\left(\frac{1}{10}\cdot\left(2+\frac{1}{10}\cdot 5\right)\right)\right)\\
&= \frac{4}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}\\
&= 0{,}425
\end{aligned}$$

3.2 Representação decimal infinita

Todas as frações que não têm fração decimal equivalente têm representação decimal infinita e periódica. Ao utilizar o mesmo procedimento que no tópico anterior, percebemos que há um padrão de repetição, como pode ser visto no exemplo a seguir:

- $\frac{5}{6} = \frac{50}{60} = \frac{1}{10} \cdot \frac{50}{6}$
$= \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{48}{6} + \frac{2}{6}\right)$
$= \frac{1}{10} \cdot \left(8 + \frac{2}{6}\right)$
$= \frac{1}{10} \cdot \left(8 + \frac{20}{60}\right)$
$= \frac{1}{10} \cdot \left(8 + \frac{1}{10} \cdot \frac{20}{6}\right)$
$= \frac{1}{10} \cdot \left(8 + \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{18}{6} + \frac{2}{6}\right)\right)$
$= \frac{1}{10} \cdot \left(8 + \frac{1}{10} \cdot \left(3 + \frac{2}{6}\right)\right)$
$= \frac{1}{10} \cdot \left(8 + \frac{1}{10} \cdot \left(3 + \frac{20}{60}\right)\right)$
$= \frac{1}{10} \cdot \left(8 + \frac{1}{10} \cdot \left(3 + \frac{1}{10} \cdot \frac{20}{6}\right)\right)$
$= \frac{1}{10} \cdot \left(8 + \frac{1}{10} \cdot \left(3 + \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{18}{6} + \frac{2}{6}\right)\right)\right)$
$= \frac{1}{10} \cdot \left(8 + \frac{1}{10} \cdot \left(3 + \frac{1}{10} \cdot \left(3 + \frac{2}{6}\right)\right)\right)$ (Note que há um padrão de repetição)
$= \frac{8}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{1}{1000} \cdot \frac{2}{6}$
$= \frac{8}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots + \frac{3}{10^n} + \ldots$
$= 0{,}8333\ldots$

3.3 Conversão da forma decimal para a forma fracionária

Para fazer as conversões, basta lembrar da relação a seguir, sendo k um número natural e $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$$k, a_1 a_2 a_3 \ldots = k + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots = \frac{a}{b}$$

Alguns exemplos para números com representação decimal finita:

- $1{,}6 = 1 + \frac{6}{10} = \frac{10}{10} + \frac{6}{10} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$
- $0{,}425 = \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{400}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{425}{1000} = \frac{17}{40}$
- $1{,}03125 = 1 + \frac{3}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{5}{10^5} = \frac{10^5 + 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5}{10^5} = \frac{103125}{10^5} = \frac{33}{32}$

Quando os números decimais têm representação infinita e periódica, a representação passa pelo conceito de soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, conforme pode ser percebido no exemplo que segue:

- $0{,}8\underline{3} = \frac{8}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots + \frac{3}{10^n} + \ldots$
  $= \frac{8}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \ldots\right)$

  (soma dos termos da progressão geométrica de razão $\frac{1}{10}$ e primeiro termo 1)

  $= \frac{8}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \left(\frac{10}{9}\right) = \frac{8}{10} + \frac{1}{30} = \frac{24}{30} + \frac{1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

3.4 Operações

Ao escrevermos os números decimais na forma de soma de frações cujos numeradores são os dígitos, podemos perceber que os algoritmos de adição, subtração e multiplicação apresentados na escola básica têm relação com a soma de frações de mesmo denominador, fazendo os ajustes ("reservas" ou "empréstimos") quando um numerador é maior que 9 ou negativo. Veja alguns exemplos e compare com os algoritmos:

- $0{,}425 + 1{,}03125 = \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} + 1 + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{5}{100000}$
  $= 1 + \frac{4}{10} + \left(\frac{2}{100} + \frac{3}{100}\right) + \left(\frac{5}{1000} + \frac{1}{1000}\right) + \frac{2}{10000} + \frac{5}{100000}$
  $= 1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{5}{100000}$
  $= 1{,}45625$

- $1{,}03125 - 0{,}425 = 1 + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{5}{100000} - \left(\frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}\right)$
  $= 1 - \frac{4}{10} + \left(\frac{3}{100} - \frac{2}{100}\right) + \left(\frac{1}{1000} - \frac{5}{1000}\right) + \frac{2}{10000} + \frac{5}{100000}$
  $= 1 - \frac{4}{10} + \frac{1}{100} - \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{5}{100000}$
  $= \frac{10}{10} - \frac{4}{10} + \frac{10}{1000} - \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{5}{100000}$
  $= \frac{6}{10} + \frac{6}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{5}{100000}$
  $= 0{,}60625$

- $0{,}425 \cdot 1{,}6 = \left(\frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}\right) \cdot \left(\frac{6}{10} + 1\right)$
  $= \frac{6 \cdot 5}{10000} + \frac{6 \cdot 2}{1000} + \frac{6 \cdot 4}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{2}{100} + \frac{4}{10}$
  $= \frac{30}{10000} + \frac{12}{1000} + \frac{24}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{2}{100} + \frac{4}{10}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{1000} + \frac{2}{1000} + \frac{10}{1000} + \frac{4}{100} + \frac{20}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{2}{100} + \frac{4}{10} \\
&= \frac{3}{1000} + \frac{2}{1000} + \frac{1}{100} + \frac{4}{100} + \frac{2}{10} + \frac{5}{1000} + \frac{2}{100} + \frac{4}{10} \\
&= \frac{10}{1000} + \frac{7}{100} + \frac{6}{10} \\
&= \frac{1}{100} + \frac{7}{100} + \frac{6}{10} \\
&= \frac{6}{10} + \frac{8}{100} \\
&= 0{,}68
\end{aligned}
$$

O algoritmo de divisão de números racionais na forma decimal tem relação com a divisão de frações decimais:

- $1{,}6 \div 0{,}25 = \frac{16}{10} \div \frac{25}{100}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{160}{100} \div \frac{25}{100} \\
&= \frac{160}{100} \cdot \frac{100}{25} \\
&= \frac{160}{25} = \frac{640}{100} = \frac{64}{10} = 6{,}4
\end{aligned}
$$

4 Ordenação e densidade

Podemos **comparar** números racionais na forma fracionária escrevendo ambos como frações equivalentes de mesmo denominador. O maior número racional é aquele que tem o maior numerador, conforme mostram os exemplos a seguir:

- $\frac{3}{5} < \frac{5}{8}$, pois $\frac{3}{5} = \frac{24}{40}, \frac{5}{8} = \frac{25}{40}$ e $24 < 25$
- $-\frac{13}{12} > -\frac{15}{8}$, pois $-\frac{13}{12} = -\frac{26}{24}, -\frac{15}{8} = -\frac{45}{24}$ e $-26 > -45$

Entre dois números racionais distintos sempre existe uma infinidade de racionais. Em razão desse fato, dizemos que o conjunto dos números racionais é um **conjunto denso**. O exemplo a seguir ilustra essa ideia:

- Entre $1{,}5 = \frac{3}{2}$ e $1{,}6 = \frac{8}{5}$ temos $1{,}51 = \frac{151}{100}$;
- Entre $1{,}5 = \frac{3}{2}$ e $1{,}51 = \frac{151}{100}$ temos $1{,}501 = \frac{1501}{1000}$;
- Entre $1{,}5 = \frac{3}{2}$ e $1{,}501 = \frac{1501}{1000}$ temos $1{,}5001 = \frac{15001}{10000}$;
- Entre $1{,}5 = \frac{3}{2}$ e $1{,}5001 = \frac{15001}{10000}$ temos $1{,}50001 = \frac{150001}{100000}$;

….

Concluindo o estudo

Com este estudo você está apto a compreender as ideias relativas ao conjunto dos números racionais e pensar em formas de abordá-las na futura prática docente a fim de proporcionar aos estudantes um aprendizado significativo para os conceitos aqui discutidos, tendo em vista a complexidade que os cerca. É extremamente importante oportunizar aos estudantes experiências que favoreçam, dentre outras questões, a constatação da multiplicidade de representações, o posicionamento na reta numérica e a densidade dos números racionais.

Referências utilizadas na elaboração deste material

CARVALHO, N. T. B.; GIMENEZ, C. S. C. **Fundamentos de matemática I**. Florianópolis: UFSC/ EAD/CED/CFM, 2009. Disponível em: <https://mtmgrad.paginas.ufsc.br/files/2014/04/Fundamentos-de-Matem%C3%A1tica-I.pdf>. Acesso em 12 dez. 2022.

RIPOLL, J. B.; RIPOLL, C. C.; SILVEIRA, J. F. P. **Números racionais, reais e complexos**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/212829>. Acesso em 12 dez. 2022.