NÚMEROS INTEIROS

Gustavo Camargo Bérti

Objetivos

O intuito deste texto é auxiliar você a:

- compreender o conceito de número inteiro;
- operar números inteiros e justificar os procedimentos de cálculo.

Iniciando o estudo

Os números inteiros fundamentam-se na ideia de poder representar a falta em uma subtração de números naturais, como, por exemplo, em $3 - 7$, em que faltam 4 quando se deve retirar 7 unidades dentre 3 unidades dadas. Neste estudo vamos compreender os conceitos acerca do conjunto dos números inteiros, que é uma ampliação do conjunto dos números naturais que estudamos recentemente.

1 Ideias fundamentais

No conjunto dos números naturais e na subtração $a - b$, temos que:

- Qualquer número natural pode ser obtido por infinitas subtrações, desde que $a > b$. Por exemplo:

$$5 = 6 - 1 = 15 - 10 = 59 - 54 = 136 - 131 = 2000 - 1995 = \cdots$$

- Quando $a < b$, podemos observar que "faltam unidades em b" para que a operação possa ser realizada.

Por exemplo, nas subtrações $1 - 6$, $10 - 15$, $54 - 59$, $131 - 136$, $1995 - 2000$ e em infinitas outras "faltam 5 unidades" em b para que a operação possa ser realizada. Essa falta de unidades será simbolizada pelo sinal "-" na frente do número, portanto todas as subtrações aqui elencadas têm como resultado -5.

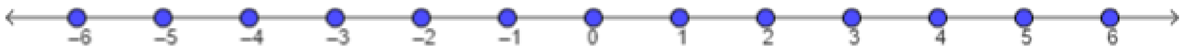
O conjunto dos números inteiros engloba todas as respostas possíveis na subtração de dois números naturais, considerando, além dos números naturais, as “faltas”. Tal conjunto é simbolizado por $\mathbb{Z}$.

Note que o conjunto dos números inteiros é ilimitado superior e inferiormente:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \ldots\}$$

Geometricamente, cada número inteiro é representado por um ponto em uma reta de forma que a distância entre dois números inteiros consecutivos seja uma unidade padrão:

Figura 1 - Representação dos números inteiros em uma reta



Fonte: Elaborado pelo autor

Alguns subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ (inteiros não negativos, equivalente ao conjunto dos naturais)

$\mathbb{Z}_+^* = \{\ 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ (inteiros positivos)

$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0\}$ (inteiros não positivos)

$\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$ (inteiros negativos)

$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$ (inteiros não nulos)

O enunciado do Princípio do Menor Inteiro diz que: *Todo subconjunto não vazio de números inteiros limitado inferiormente possui um menor elemento, aquele que está posicionado mais à esquerda na reta numérica.*

Seguem alguns exemplos para compreensão desse enunciado:

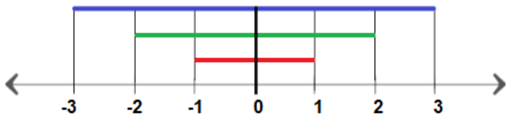
- Se A é um conjunto finito tal que $A = \{16, -78, 20, -13, 15\}$, temos que o menor elemento de A é -78;

● Se B é o conjunto dos elementos da progressão aritmética cujo primeiro termo é -20 e a razão é 5 (note que se trata de um conjunto infinito, porém limitado inferiormente), temos que o menor elemento de B é -20.

1.1 Oposto de um número inteiro

Dado um número inteiro a, temos o chamado oposto (ou simétrico) de a (notação: $-a$). Ou seja, refere-se ao número inteiro cuja distância ao 0 na reta numérica é a mesma que a distância de a ao 0. A Figura 2 ilustra pares de números inteiros que são opostos: 3 e -3, 2 e -2 e 1 e -1.

Figura 2 - Pares de números opostos na reta numérica



Fonte: Elaborado pelo autor

2 Operações

A partir da compreensão dos números inteiros, vamos agora verificar os procedimentos e justificativas para o cálculo nas quatro operações básicas nesse contexto.

2.1 Adição

O total obtido em uma adição cujas parcelas são os números inteiros a e b depende da natureza destas, conforme ilustrado no Quadro 1.

Quadro 1 - Adição de números inteiros

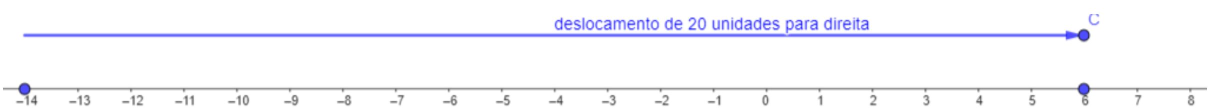
a	b	**Procedimento**	**Exemplos**
positivo	**positivo**	$a + b$ é uma soma de números naturais.	$13 + 56 = 69$
negativo	**negativo**	Os opostos $-a$ e $-b$ são positivos, então fazemos a soma de números naturais $-a + (-b)$ e mantemos o sinal negativo para o total obtido.	$-13 + (-56)$ $= -(13 + 56) = -69$
positivo	**0**	O resultado é a. (Análogo para o caso em que $a = 0$ e $b \neq 0$)	$13 + 0 = 13$
negativo	**0**		$0 + (-56) = -56$
positivo	**negativo**	Basta reescrever uma das parcelas de modo que se possa obter a soma com o oposto da outra.	$13 + (-56)$ $= 13 + (-13) + (-43)$ $= 0 + (-43)$ $= -43$
negativo	**positivo**		

Fonte: Elaborado pelo autor

Algumas observações a considerar:

- Valem as propriedades comutativa, associativa, da existência do elemento neutro e do elemento oposto;
- A soma de um número inteiro e seu oposto sempre gera o elemento neutro 0;
- No conjunto dos números inteiros, a adição é uma operação fechada, tendo em vista que a soma de dois números inteiros sempre gera um número inteiro;
- Geometricamente, a soma $a + b$ corresponde ao ponto da reta numérica em que se chega partindo de a, descolando-se b unidades para direita (caso $b > 0$) ou $-b$ unidades para esquerda (caso $b < 0$). A Figura 3 mostra o fato do resultado da adição $-14 + 20$ ser 6.

Figura 3 - Exemplo de adição na reta numérica



Fonte: Elaborado pelo autor

2.2 Subtração

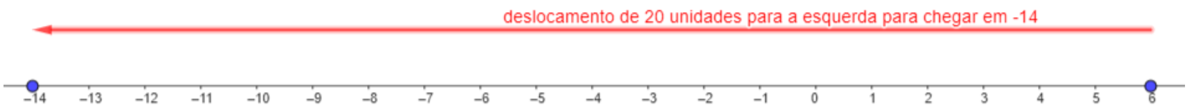
A subtração de números inteiros $a - b$ é equivalente à soma $a + (-b)$, ou seja, somar a com o oposto de b. Os exemplos a seguir ilustram tal ideia:

- $13 - 56 = 13 + (-56) = -43$
- $-13 - (-56) = -13 + 56 = 43$
- $13 - (-56) = 13 + 56 = 69$
- $-13 - 56 = -13 + (-56) = -69$

Algumas observações a considerar:

- A subtração não é comutativa nem associativa;
- No conjunto dos números inteiros, a subtração é uma operação fechada, tendo em vista que a subtração de dois números inteiros sempre gera um número inteiro;
- Geometricamente, a subtração $a - b$ corresponde a um deslocamento na reta numérica partindo de b, deslocando-se até a, considerando-se positivo o deslocamento para direita e negativo para esquerda. Por exemplo: $-14 - (+6) = -20$, pois partindo de 6, precisamos fazer um deslocamento de 20 unidades para a esquerda para chegar em -14, conforme demonstra a Figura 4.

Figura 4 - Exemplo de subtração na reta numérica



Fonte: Elaborado pelo autor

2.3 Multiplicação

O produto obtido em uma multiplicação, cujos fatores são os números inteiros a e b, depende da natureza destes, conforme o Quadro 2.

Quadro 2 - Multiplicação de números inteiros

a	b	**Procedimento**	**Exemplos**
positivo	positivo	$a \cdot b$ é uma soma de a parcelas iguais a b.	$3 \cdot 13$ $= 13 + 13 + 13 = 39$
positivo	negativo		$3 \cdot (-13)$ $= -13 + (-13) + (-13) = -39$
negativo	negativo	O negativo do primeiro fator indica que o produto será o oposto de $(-a) \cdot b$.	$-3 \cdot 13$ $= -[(+3) \cdot 13] = -[+39] = -39$
negativo	positivo		$-3 \cdot (-13)$ $= -[(+3) \cdot (-13)] = -[-39] = 39$
positivo	0	O resultado é 0. (Análogo para o caso em que $a = 0$ e $b \neq 0$)	$13 \cdot 0 = 0$
negativo	0		$0 \cdot (-3) = 0$

Fonte: Elaborado pelo autor

É importante considerar os seguintes fatos sobre a multiplicação de números inteiros:

- Valem as propriedades comutativa, associativa, distributiva e da existência do elemento neutro (1 no caso da multiplicação);
- No conjunto dos números inteiros, a multiplicação é uma operação fechada, tendo em vista que a soma de dois números inteiros sempre gera um número inteiro;
- Em uma multiplicação de números inteiros é comum realizarmos a operação pensando nos fatores como sendo números naturais (associando os opostos no caso de inteiros negativos) e depois definindo o “sinal” pela regra de sinais, ilustrada do Quadro 3:

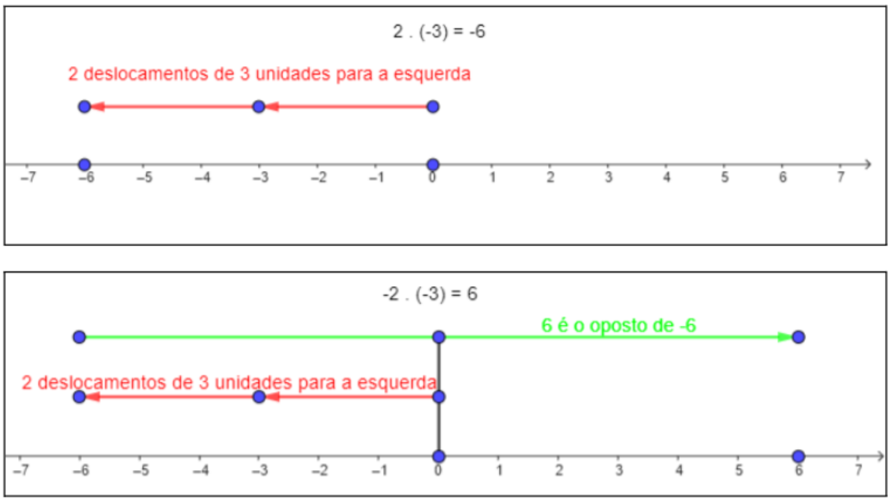
Quadro 3 - Regra de sinais da multiplicação

a	b	$a \cdot b$
positivo	positivo	positivo
positivo	negativo	negativo
negativo	positivo	negativo
negativo	negativo	positivo

Fonte: Elaborado pelo autor

- Geometricamente, a multiplicação $a \cdot b$ corresponde a a deslocamentos consecutivos (quando $a > 0$), a partir do 0 da reta numérica, de b unidades (para a direita se $b > 0$ e para esquerda se $b < 0$). Caso $a < 0$, fazemos $-a$ deslocamentos e depois obtemos o simétrico (oposto) na reta numérica. A Figura 5 traz um exemplo de multiplicação com um fator positivo e outro negativo e outro com ambos negativos.

Figura 5 - Exemplos de multiplicação na reta numérica



Fonte: Elaborado pelo autor

2.4 Divisão

De forma análoga à definição que fizemos para números naturais, o quociente entre dois números inteiros a e b é o número c, que ao ser multiplicado por b, gera o número a. Seguem alguns exemplos:

- $-9 \div 3 = -3$
- $12 \div (-6) = -2$
- $-50 \div (-5) = 10$
- $-100 \div 8$ (O resultado de $-100 \div 8$ não é um número inteiro, pois nenhum número inteiro multiplicado por 8 gera -100 como resultado).

É importante considerar os seguintes fatos:

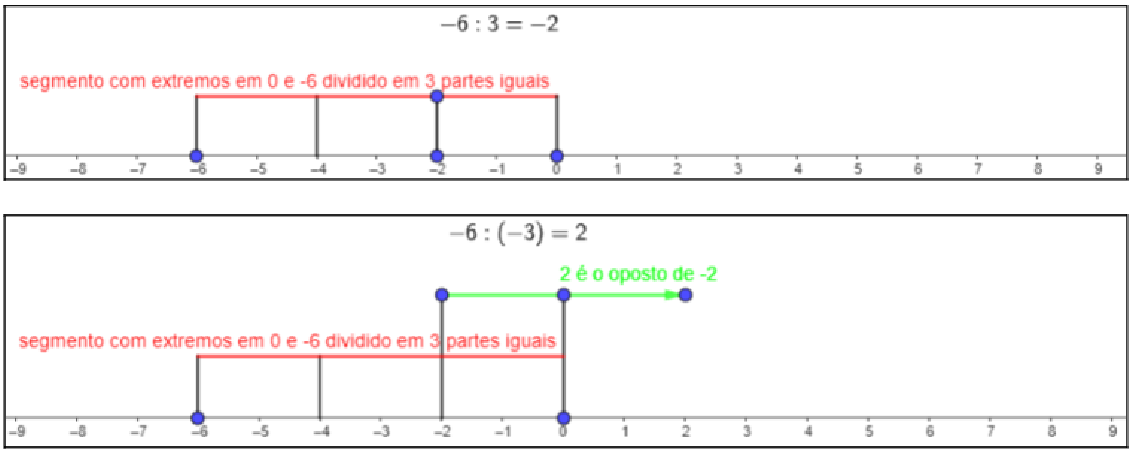
- A divisão não é comutativa nem associativa;

● A divisão não é uma operação fechada no conjunto dos números inteiros, visto que na maior parte dos casos não é possível encontrar um número c que satisfaça a definição;

● Dada a relação com a multiplicação, a divisão segue a mesma "regra de sinais";

● Geometricamente, a divisão $a \div b$ corresponde ao extremo do segmento mais próximo de 0 obtido quando se divide o segmento com extremos em 0 e em a em b (ou $-b$, quando $b < 0$) partes iguais. Caso $a < 0$, consideramos o simétrico ao ponto obtido no processo anterior. A Figura 6 traz um exemplo de divisão com dividendo negativo e divisor positivo e outro com ambos negativos.

Figura 6 - Exemplos de divisão na reta numérica



Fonte: Elaborado pelo autor

Concluindo o estudo

Com este estudo você está apto a utilizar e justificar o funcionamento das propriedades e operações envolvendo números inteiros. A compreensão clara sobre tais fatos é extremamente importante para o desenvolvimento dos raciocínios matemáticos ao longo do curso e da futura prática como docente de Matemática.

Referências utilizadas na elaboração deste material

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARVALHO, N. T. B.; GIMENEZ, C. S. C. **Fundamentos de matemática I**. Florianópolis: UFSC/ EAD/CED/CFM, 2009. Disponível em: <https://mtmgrad.paginas.ufsc.br/files/2014/04/Fundamentos-de-Matem%C3%A1tica-I.pdf>. Acesso em 12 dez. 2022.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de aritmética**. São Paulo: Atual, 2021.