# NÚMEROS NATURAIS

**Gustavo Camargo Bérti**

**Objetivos**

A finalidade deste material é ajudar você a:

- compreender o conceito de número natural;
- operar números naturais e justificar os algoritmos de cálculo;
- entender os princípios envolvidos nas regras de divisibilidade, no mínimo múltiplo comum e no máximo divisor comum.

**Iniciando o estudo**

Os números naturais estão associados à contagem de objetos, portanto os utilizamos desde a idade pré-escolar. Mesmo com essa utilização ao longo de quase toda nossa vida, os conceitos e propriedades que envolvem os números naturais nem sempre são claros. Neste estudo vamos abordar tal problemática.

## 1 Ideias fundamentais

As ideias relativas ao conjunto dos números naturais, simbolizado por $\mathbb{N}$, se estruturam nos Axiomas de Peano, os quais promovem consequências que justificam todas as propriedades dos números dessa natureza.

### 1.1 Axiomas de Peano

Os Axiomas de Peano são afirmações necessárias para a concepção da noção de número natural:

1) Zero é o menor número natural;
2) Todo número natural tem um sucessor;

3) Zero não é sucessor de nenhum número natural;
4) Se dois números naturais têm o mesmo sucessor, então eles são iguais;
5) Se uma coleção S de números naturais contém o zero e todos os sucessores dos elementos de S, então S é o conjunto de todos os números naturais ($\mathbb{N}$).

Observações:

- Há bibliografias que consideram o 1 como sendo o menor número natural e trazem os axiomas de Peano adaptados para tal fato;
- Em nosso texto, indica-se por $\mathbb{N}$* o conjunto dos números naturais excluindo-se o zero.
- O axioma 2 permite a construção de todos os números naturais, visto que 1 é o sucessor de 0, 2 é o sucessor de 1, 3 é o sucessor de 2 e assim por diante.

## 1.2 Princípio da Boa Ordem

O enunciado do Princípio da Boa Ordem diz que todo subconjunto não vazio de números naturais possui um menor elemento, conforme exemplificado a seguir:

- Se A é um conjunto finito tal que $A = \{16, 78, 20, 13, 15\}$, temos que o menor elemento de A é 13;
- Se B é o conjunto dos números ímpares maiores que 100 (conjunto infinito), temos que o menor elemento de B é 101.

## 1.3 Sistema de numeração decimal

Dispomos de 10 algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9) para representar os infinitos números naturais. Tal fato é possível em função de que podemos escrevê-los como uma soma de produtos de potências de 10 pelos dígitos. Veja alguns exemplos:

- $5 = 5 \cdot 10^0$
- $34 = 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$
- $578 = 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$

Note que o número multiplicado por $10^0$ equivale ao dígito da unidade; já o multiplicado por $10^1$, ao dígito da dezena; o multiplicado por $10^2$, ao dígito da centena e assim sucessivamente.

## 2 Operações

As quatro operações aritméticas básicas são adição, multiplicação, subtração e divisão. Na sequência de nosso estudo verificaremos a conceituação de cada uma delas no conjunto dos números naturais.

### 2.1 Adição

A soma dos números naturais $a$ e $b$ é o número que se obtém, a partir de $a$ obtendo-se o sucessor por $b$ vezes seguidas, conforme ilustra o Quadro 1.

Quadro 1 - Utilização da ideia de sucessor na adição

| | Número natural | Sucessor |
|---|---|---|
| | $a$ | $a + 1$ |
| | $a + 1$ | $a + 1 + 1$ |
| | $a + 1 + 1$ | $a + 1 + 1 + 1$ |
| $a + b$ | $a + 1 + 1 + 1$ | $a + 1 + 1 + 1 + 1$ |
| | ... | ... |
| | $a + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ | $a \boxed{+ 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1}$ A partir de "a", obteve-se "b" vezes seguidas o sucessor |

Fonte: elaborado pelo autor

Por exemplo, para calcular $4 + 3$ poderíamos aplicar a obtenção do sucessor três vezes seguidas, partindo de $4$:

1ª vez: $4 + 1 = 5$ 2ª vez: $5 + 1 = 6$ 3ª vez: $6 + 1 = 7$

## 2.2 Multiplicação

O produto dos números naturais $a$ e $b$ é o número que se obtém fazendo uma soma de $a$ parcelas iguais a $b$, ou vice-versa. Simbolicamente, $a \cdot b = b + b + b + \ldots + b$, sendo que no lado direito da igualdade teríamos $a$ parcelas. Por exemplo, para calcular $4 \cdot 3$ basta fazer $3 + 3 + 3 + 3 = 12$.

## 2.3 Subtração

Dados dois números naturais $a$ e $b$, dizemos que $a \leq b$ ($a$ é menor ou igual a $b$) se existe um número natural $c$ tal que $a + c = b$, e esse número $c$ é chamado de diferença entre $b$ e $a$. Analogamente, $a \geq b$ ($a$ é maior ou igual a $b$) se existe um número natural $c$ tal que $b + c = a$. Seguem dois exemplos:

- $4 \leq 9$, pois existe um número natural (5) que somado a 4 equivale a 9.
- $4 \geq 3$, pois existe um número natural (1) que somado a 3 equivale a 4.

A operação de subtração objetiva encontrar esse número $c$, citado anteriormente:

$$a - b = c \;\Leftrightarrow\; c + b = a$$

Observe, para que $c$ seja um número natural, é preciso que $a \geq b$, ou seja, nem sempre uma subtração de dois números naturais gera um número natural como resultado, conforme podemos perceber nos exemplos a seguir:

- $4 - 3 = 1$, pois $1 + 3 = 4$;
- O resultado de $3 - 4$ não é um número natural, pois nenhum número natural somado a 4 gera 3 como resultado.

## 2.4 Divisão

O quociente entre dois números naturais $a$ e $b$ é o número $c$, que ao ser multiplicado por $b$, gera o número $a$. Simbolicamente temos:

$$a \div b = c \;\Leftrightarrow\; c \cdot b = a$$

Assim como na subtração, nem sempre obtemos um número natural ao operar dois números naturais:

- O resultado de $4 \div 3$ não é um número natural, pois nenhum número natural multiplicado por 3 gera 4 como resultado;
- $6 \div 3 = 2$, pois $2 \cdot 3 = 6$.

## 2.5 Propriedades das operações

O Quadro 2 traz um comparativo entre as quatro operações básicas no conjunto dos números naturais quanto ao fechamento (se o resultado da operação de dois números naturais também é natural), à propriedade comutativa (se a ordem entre os dois números operados não afeta o resultado), à propriedade associativa (se a ordem de operação de dois elementos quaisquer não afeta o resultado quando a operação envolve mais de dois números) e à existência de elemento neutro.

Quadro 2 - Comparativo entre as propriedades das operações

| **Operação** (Dados dois números naturais $a$ e $b$) | **A operação é fechada?** | **Propriedade comutativa?** | **Propriedade associativa?** | **Tem elemento neutro?** |
|---|---|---|---|---|
| **Adição** | Sim, pois o resultado de $a + b$ sempre é um número natural. | Sim, pois $a + b = b + a$ | Sim, pois $(a + b) + c = a + (b + c)$ | Sim, pois $a + 0 = a$ $b + 0 = b$ |
| **Multiplicação** | Sim, pois o resultado de $a \cdot b$ sempre é um número natural. | Sim, pois $a \cdot b = b \cdot a$ | Sim, pois $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ | Sim, pois $a \cdot 1 = a$ $b \cdot 1 = b$ |
| **Subtração** | Não, pois o resultado de $a - b$ nem sempre é um número natural, como por exemplo em $3 - 4$. | Não, pois $a - b \neq b - a$, como por exemplo em $3 - 4 \neq 4 - 3$, visto que o lado direito da desigualdade resulta em 1 e o lado esquerdo não resulta em um número natural. | Não, pois $(a - b) - c \neq a - (b - c)$, como por exemplo em $(5 - 4) - 3 \neq 5 - (4 - 3)$, visto que o lado direito da desigualdade resulta em 4 e o lado esquerdo não resulta em um número natural. | Sim, pois $a - 0 = a$ $b - 0 = b$ |
| **Divisão** | Não, pois o resultado de $a \div b$ nem sempre é um número natural, como por exemplo em $3 \div 6$. | Não, pois $a \div b \neq b \div a$, como por exemplo em $3 \div 6 \neq 6 \div 3$, visto que o lado direito da desigualdade resulta em 2 e o lado esquerdo não resulta em um número natural. | Não, pois $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$, como por exemplo em $(6 \div 3) \div 2 \neq 6 \div (3 \div 2)$, visto que o lado direito da desigualdade resulta em 4 (note que $3 \div 2$ não gera um número natural) e o lado esquerdo é 1. | Sim, pois $a \div 1 = a$ $b \div 1 = b$ |

Fonte: elaborado pelo autor

Na multiplicação de números naturais é comum utilizamos a propriedade distributiva em relação à soma, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Por exemplo:

$$10 \cdot (2 + 3) = 10 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 20 + 30 = 50$$

## 2.6 Algoritmos

Podemos verificar a lógica de funcionamento dos algoritmos a partir do sistema de numeração decimal. No Quadro 3, podemos perceber a relação entre o reagrupamento dos números e as etapas do algoritmo de soma, inclusive a necessidade da “reserva”.

Quadro 3 - Algoritmo de soma

| Operação | Exemplo | Operando... | Algoritmo |
|---|---|---|---|
| Adição | 578 + 34 | $5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$ | |
| | | $(5+0) \cdot 10^2 + (7+3) \cdot 10^1 + (8+4) \cdot 10^0$ | |
| | | $(5+0) \cdot 10^2 + (7+3) \cdot 10^1 + (10+2) \cdot 10^0$ | $\begin{array}{r} {}^{1}\phantom{8} \\ 578 \\ +\ 34 \\ \hline 2 \end{array}$ |
| | | $(5+0) \cdot 10^2 + (7+3+1) \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$ | $\begin{array}{r} {}^{1\,1}\phantom{8} \\ 578 \\ +\ 34 \\ \hline 12 \end{array}$ |
| | | $(5+0+1) \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$ | $\begin{array}{r} {}^{1\,1}\phantom{8} \\ 578 \\ +\ 34 \\ \hline 612 \end{array}$ |

Fonte: elaborado pelo autor

Podemos fazer relações análogas para justificar o funcionamento dos algoritmos da multiplicação e da subtração. Consulte o **Apêndice A**, ao final deste texto, para ver exemplos explicitando tais relações.

## 2.7 Algoritmo de Euclides

A divisão de números de números naturais $a \div b$ resulta em um quociente $q$ e um resto $r$, sendo $q$ e $r$ números naturais e $r < b$. Sendo assim, $a = bq + r$ , conforme ilustram os exemplos a seguir:

- $6 \div 3 = 2$, com resto $0$, pois $6 = 3 \cdot 2 + 0$
- $46 \div 13 = 3$, com resto $7$, pois $46 = 13 \cdot 3 + 7$

O algoritmo de Euclides explica o algoritmo que utilizamos na divisão, como pode ser percebido no Quadro 4.

Quadro 4 - Algoritmo de Euclides e algoritmo de divisão

| | | |
|---|---|---|
| $578 \div 34$ | $57 = 34 \cdot 1 + 23$ | $\begin{array}{r\|l} 578 & 34 \\ \hline -34 & 1 \\ 23 & \end{array}$ |
| | $570 = 34 \cdot 10 + 230$ | |
| | $570 = 34 \cdot 10 + 34 \cdot 6 + 26$ | Escrevendo 230 como $34 \cdot 6 + 26$ |
| | $570 = 34 \cdot 16 + 26$ | |
| | $570 + 8 = 34 \cdot 16 + 26 + 8$ | $\begin{array}{r\|l} 578 & 34 \\ \hline -34 & 17 \\ 238 & \\ -238 & \\ 000 & \end{array}$ |
| | $578 = 34 \cdot 16 + 34$ | |
| | $578 = 34 \cdot 17 + 0$ | |

Fonte: elaborado pelo autor

### 3 Múltiplos e divisores

Dados os números naturais $a$ e $b$, dizemos que $a$ divide $b$ (notação: $a \mid b$), se existe um número natural $q$ tal que $a \cdot q = b$. Nesse caso, também dizemos que $b$ é múltiplo de $a$ e que $a$ é divisor de $b$. Seguem alguns exemplos:

- 30 é múltiplo de 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30;
- 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30 são divisores de 30;
- 4 é múltiplo de 1, 2 e 4;
- 1, 2 e 4 são múltiplos de 4.

Note que, ao escrever todos os divisores de um número natural em ordem crescente, o produto dos elementos equidistantes equivale ao número em questão. Observe os exemplos a seguir:

- os divisores de 30 em ordem crescente são 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30, e temos que $1 \cdot 30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6 = 30$.
- os divisores de 144 em ordem crescente são 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72 e 144, e temos que $1 \cdot 144 = 2 \cdot 72 = 3 \cdot 48 = 4 \cdot 36 = 6 \cdot 24 = 8 \cdot 18 = 9 \cdot 16 = 12 \cdot 12 = 144$

3.1 Critérios de divisibilidade

É possível estabelecer regras práticas para determinar se um número natural é divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 dentre outros. A seguir vamos listar esses critérios de divisibilidade, cujas demonstrações e exemplos podem ser consultados no Apêndice B, ao final deste texto.

- Divisibilidade por 2: quando o último algarismo é par;
- Divisibilidade por 3: quando a soma dos algarismos é múltipla de 3;
- Divisibilidade por 4: quando o número formado pelos últimos dois algarismos é múltiplo de 4;
- Divisibilidade por 5: quando o último algarismo é 0 ou 5;
- Divisibilidade por 6: quando o número é múltiplo de 2 e de 3;
- Divisibilidade por 8: quando o número formado pelos últimos três algarismos é múltiplo de 8;
- Divisibilidade por 9: quando a soma dos algarismos é múltipla de 9;
- Divisibilidade por 10: quando o último algarismo é 0.

3.2 Números primos

Um número natural é primo se tem apenas dois divisores: o 1 e ele mesmo. Seguem alguns exemplos:

- 0 não é primo pois tem infinitos divisores (qualquer número natural não nulo);
- 1 não é primo pois tem apenas um divisor: 1;
- 2 é primo e nenhum outro múltiplo de 2 (número par) é primo;
- 3 é primo e nenhum outro múltiplo de 3 é primo;

Podemos organizar os números primos em um dispositivo chamado Crivo de Eratóstenes (Quadro 5), que consiste em riscar (excluir) os múltiplos de cada número primo a partir do 2.

Quadro 5 - Crivo de Eratóstenes

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~1~~ | **11** | ~~21~~ | **31** | **41** | ~~51~~ | **61** | **71** | ~~81~~ | ~~91~~ |
| **2** | ~~12~~ | ~~22~~ | ~~32~~ | ~~42~~ | ~~52~~ | ~~62~~ | ~~72~~ | ~~82~~ | ~~92~~ |
| **3** | **13** | **23** | ~~33~~ | **43** | **53** | ~~63~~ | **73** | **83** | ~~93~~ |
| ~~4~~ | ~~14~~ | ~~24~~ | ~~34~~ | ~~44~~ | ~~54~~ | ~~64~~ | ~~74~~ | ~~84~~ | ~~94~~ |
| **5** | ~~15~~ | ~~25~~ | ~~35~~ | ~~45~~ | ~~55~~ | ~~65~~ | ~~75~~ | ~~85~~ | ~~95~~ |
| ~~6~~ | ~~16~~ | ~~26~~ | ~~36~~ | ~~46~~ | ~~56~~ | ~~66~~ | ~~76~~ | ~~86~~ | ~~96~~ |
| **7** | **17** | ~~27~~ | **37** | **47** | ~~57~~ | **67** | ~~77~~ | ~~87~~ | **97** |
| ~~8~~ | ~~18~~ | ~~28~~ | ~~38~~ | ~~48~~ | ~~58~~ | ~~68~~ | ~~78~~ | ~~88~~ | ~~98~~ |
| ~~9~~ | **19** | **29** | ~~39~~ | ~~49~~ | **59** | ~~69~~ | **79** | **89** | ~~99~~ |
| ~~10~~ | ~~20~~ | ~~30~~ | ~~40~~ | ~~50~~ | ~~60~~ | ~~70~~ | ~~80~~ | ~~90~~ | ~~100~~ |

Fonte: elaborado pelo autor

## 3.3 Decomposição em fatores primos

O enunciado do Teorema Fundamental da Aritmética (neste momento apenas informado, porém ao longo do curso será demonstrado) diz que: *Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou pode ser escrito de forma única, desconsiderando a ordem dos fatores, como produto de números primos.*

A seguir temos alguns exemplos dessa decomposição em fatores primos:

- $30 = 2 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
- $135 = 5 \cdot 27 = 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 5 \cdot 3^3$
- $1248 = 8 \cdot 156 = 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 39 = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 13 = 2^5 \cdot 3 \cdot 13$

## 3.4 Mínimo múltiplo comum

O mínimo múltiplo comum (mmc) de dois números naturais $a$ e $b$ é o menor número natural que é, simultaneamente, múltiplo de $a$ e de $b$.

Observando a decomposição em fatores primos de ambos os números, é possível obter o mínimo múltiplo comum considerando as potências de números primos na decomposição de $a$ ou de $b$ e o maior expoente em cada uma delas, conforme elucidado nos exemplos que seguem:

- $mmc\ (30, 135) = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270$. Note que em ambas as decomposições em fatores primos ilustradas na seção anterior aparecem potências de 2, 3 e 5. Em ambos os casos, os expoentes das potências de 2 e 5 são 1, mas no caso das potências de 3, o maior expoente é 3.

- $mmc\,(30, 1248) = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 6240$. Note que em ambas as decomposições em fatores primos ilustradas na seção anterior aparecem potências de 2 e 3, e em ambas o expoente de 3 é 1, mas no caso do 2 o maior expoente é 5. 5 e 13 são fatores que não aparecem em ambas as decomposições.
- $mmc\,(135, 1248) = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 6240$. Note que em ambas as decomposições em fatores primos ilustradas na seção anterior aparecem potências de 2 e 3, e em ambas o expoente de 3 é 1, mas no caso do 2 o maior expoente é 5. 5 e 13 são fatores que aparecem em apenas um dos números.

### 3.5 Máximo divisor comum

O máximo divisor comum (mdc) de dois números naturais $a$ e $b$ é o maior número natural que é, simultaneamente, divisor de $a$ e de $b$.

Observando a decomposição em fatores primos de ambos os números, é possível obter o máximo divisor comum considerando as potências de números primos que estão, simultaneamente, na decomposição de $a$ ou de $b$ e o menor expoente em cada uma delas, conforme exemplificado a seguir:

- $mdc\,(30, 135) = 3 \cdot 5 = 15$. Note que em ambas as decomposições em fatores primos ilustradas em seção anterior aparecem potências de 3 e 5, e em ambas o expoente de 5 é 1, mas no caso do 3 o menor expoente é 1.
- $mdc\,(30, 1248) = 2 \cdot 3 = 6$. Note que em ambas as decomposições em fatores primos ilustradas em seção anterior aparecem potências de 2 e 3, e em ambas o expoente de 3 é 1, mas no caso do 2 o menor expoente é 1.
- $mdc\,(135, 1248) = 3$. Note que em ambas as decomposições em fatores primos ilustradas em seção anterior aparecem potências de 3, sendo que o menor expoente é 1.

Quando $mdc\,(a, b) = 1$, dizemos que $a$ e $b$ são **primos entre si**. Nesse caso, exceto o 1, não há divisores em comum. Por exemplo, 135 e 8 são primos entre si, pois $mdc\,(135, 8) = 1$, visto que $135 = 5 \cdot 3^3$ e $8 = 2^3$.

## Concluindo o estudo

Com este estudo você está apto a utilizar e justificar o funcionamento das propriedades e operações envolvendo números naturais. A compreensão clara sobre tais fatos é extremamente importante para o desenvolvimento dos raciocínios matemáticos ao longo do curso e da futura prática como docente de Matemática.

## Referências utilizadas para a elaboração deste material


CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção do Professor de Matemática. vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, 2021

CARVALHO, N. T. B.; GIMENEZ, C. S. C. **Fundamentos de matemática I**. Florianópolis: UFSC/ EAD/CED/CFM, 2009. Disponível em: <https://mtmgrad.paginas.ufsc.br/files/2014/04/Fundamentos-de-Matem%C3%A1tica-I.pdf>. Acesso em 12 dez. 2022.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de aritmética**. São Paulo: Atual, 2021.

OBMEP. **Sala de Estudo**: Teorema Fundamental da Aritmética. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/teorema-fundamental-da-aritmetica/>. Acesso em: 21 dez. 2022.

## APÊNDICE A - Algoritmos de adição, subtração e multiplicação de números naturais

| Operação | Exemplo | Operando... | Algoritmo |
|---|---|---|---|
| **Adição** | $578 + 34$ | $\underline{5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0} + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$ | $\begin{array}{r} {}^{1}\phantom{8} \\ 578 \\ +\ \ 34 \\ \hline 2 \end{array}$ |
| | | $\underline{(5+0) \cdot 10^2 + (7+3) \cdot 10^1 + (8+4) \cdot 10^0}$ | |
| | | $\underline{(5+0) \cdot 10^2 + (7+3) \cdot 10^1 + (10+2) \cdot 10^0}$ | |
| | | $\underline{(5+0) \cdot 10^2 + (7+3+1) \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0}$ | $\begin{array}{r} {}^{1\ 1}\phantom{8} \\ 578 \\ +\ \ 34 \\ \hline 12 \end{array}$ |
| | | $\underline{(5+0+1) \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0}$ | $\begin{array}{r} {}^{1\ 1}\phantom{8} \\ 578 \\ +\ \ 34 \\ \hline 612 \end{array}$ |
| **Multiplicação** | $578 \cdot 34$ | $\underline{(5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0)} \cdot (3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0)$ | $\begin{array}{r} {}^{3\ 3}\phantom{8} \\ 578 \\ \bullet\ \ 34 \\ \hline 2312 \\ \boxed{\phantom{0000}} \end{array}$ $\begin{array}{r} {}^{2\ 2}\phantom{8} \\ 578 \\ \bullet\ \ 34 \\ \hline \boxed{\phantom{0000}} \\ 1734 \end{array}$ |
| | | $(5 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^1 \cdot 4 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^0 \cdot 4 \cdot 10^0) + (5 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^1 \cdot 3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 \cdot 3 \cdot 10^1)$ | |
| | | $\underline{(20 \cdot 10^2 + 28 \cdot 10^1 + 32 \cdot 10^0)} + (15 \cdot 10^3 + 21 \cdot 10^2 + 24 \cdot 10^1)$ | |
| | | $\underline{((2 \cdot 10) \cdot 10^2 + (2 \cdot 10 + 8) \cdot 10^1 + (3 \cdot 10 + 2) \cdot 10^0)} + ((1 \cdot 10 + 5) \cdot 10^3 + (2 \cdot 10 + 1) \cdot 10^2 + (2 \cdot 10 + 4) \cdot 10^1)$ | |
| | | $\underline{(2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + (8+3) \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0)} + (1 \cdot 10^4 + (5+2) \cdot 10^3 + (1+2) \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1)$ | |
| | | $\underline{(2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + (11) \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0)} + (1 \cdot 10^4 + (5+2) \cdot 10^3 + (1+2) \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1)$ | |
| | | $\underline{(2 \cdot 10^3 + (2+1) \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0)} + (1 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1)$ | |
| | | $1 \cdot 10^4 + (2+7) \cdot 10^3 + (3+3) \cdot 10^2 + (1+4) \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | $1 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$ | 578<br>• 34<br>2312<br>+1734<br>19652 |
| **Subtração** | 578 − 34 | $\underline{5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0}$ - $(3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0)$ | 578<br>- 34<br>4 |
| | | $\underline{(5-0) \cdot 10^2 + (7-3) \cdot 10^1 + (8-4) \cdot 10^0}$ | |
| | | $\underline{(5-0) \cdot 10^2 + (7-3) \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0}$ | |
| | | $\underline{(5-0) \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0}$ | 578<br>- 34<br>44 |
| | | $\underline{5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0}$ | 578<br>- 34<br>544 |

## APÊNDICE B - Critérios de divisibilidade

| **Divisibilidade por...** | **Critério** | **Justificativa**<br>(Sendo $d_1$, $d_2$ e $d_3$ algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9) e $k$ um número natural) | **Exemplo** |
|---|---|---|---|
| **2** | O último algarismo é par. | $d_2d_1d_0 = 2k$<br>$\Rightarrow 10^2d_2 + 10d_1 + d_0 = 2k$<br>$\Rightarrow 2(50d_2 + 5d_1) + d_0 = 2k$<br>$\Rightarrow 50d_2 + 5d_1 + \frac{d_0}{2} = k$<br>É preciso que $d_0$ seja 0, 2, 4, 6 ou 8 para que k seja um número natural. | $3398$ é múltiplo de 2.<br>(De fato, $3398 = 2 \cdot 1699$) |
| **3** | A soma dos algarismos é múltiplo de 3. | $d_2d_1d_0 = 3k$<br>$\Rightarrow 10^2d_2 + 10d_1 + d_0 = 3k$<br>$\Rightarrow (99+1)d_2 + (9+1)d_1 + d_0 = 3k$<br>$\Rightarrow 9(11d_2 + d_1) + d_2 + d_1 + d_0 = 3k$<br>$\Rightarrow \frac{9(11d_2 + d_1)}{3} + \frac{d_2 + d_1 + d_0}{3} = k$<br>$\Rightarrow 3(11d_2 + d_1) + \frac{d_2 + d_1 + d_0}{3} = k$<br>É preciso que $d_2 + d_1 + d_0$ seja múltiplo de 3 para que k seja um número natural. | $339$ é múltiplo de 3, pois $3 + 3 + 9 = 15$, que é múltiplo de 3.<br>(De fato, $339 = 3 \cdot 113$) |
| **4** | O número formado pelos últimos dois algarismos é múltiplo de 4. | $d_2d_1d_0 = 4k$<br>$\Rightarrow 10^2d_2 + 10d_1 + d_0 = 4k$<br>$\Rightarrow \frac{100d_2}{4} + \frac{10d_1 + d_0}{4} = k$<br>$\Rightarrow 25d_2 + \frac{10d_1 + d_0}{4} = k$<br>É preciso que $10d_1 + d_0$ (número formado pelos últimos 2 algarismos) seja múltiplo de 4 para que k seja um número natural. | $3396$ é múltiplo de 4, pois $96$ é múltiplo de 4.<br>(De fato, $3396 = 4 \cdot 849$) |
| **5** | O último algarismo é 5 ou 0. | $d_2d_1d_0 = 5k$<br>$\Rightarrow 10^2d_2 + 10d_1 + d_0 = 5k$<br>$\Rightarrow 10(10d_2 + d_1) + d_0 = 5k$<br>$\Rightarrow \frac{10(10d_2 + d_1)}{5} + \frac{d_0}{5} = k$<br>$\Rightarrow 2(10d_2 + d_1) + \frac{d_0}{5} = k$<br>É preciso que $d_0$ seja 0 ou 5 para que k seja um número natural. | $3395$ é múltiplo de 5, pois o último algarismo é 5.<br>(De fato, $3395 = 5 \cdot 679$) |
| **6** | Ser múltiplo de 3 e de 2. | $d_2d_1d_0 = 6k$<br>$\Rightarrow 10^2d_2 + 10d_1 + d_0 = 3 \cdot (2k)$<br>Ou seja, o lado esquerdo da igualdade precisa ser múltiplo de 3, portanto precisa respeitar a regra de divisibilidade por 3.<br><br>Por outro lado: | $3396$ é múltiplo de 6 pois a soma dos algarismos é $3 + 3 + 9 + 6 = 21$ (múltiplo de 3) e o último algarismo é par.<br>(De fato, $3396 =$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | $\Rightarrow 10^2 d_2 + 10 d_1 + d_0 = 2 \cdot (3k)$<br>Ou seja, o lado esquerdo da igualdade precisa ser múltiplo de 2, portanto precisa respeitar a regra de divisibilidade por 2. | $6 \cdot 566$) |
| **8** | O número formado pelos últimos três algarismos é múltiplo de 8. | $d_3 d_2 d_1 d_0 = 8k$<br>$\Rightarrow 10^3 d_3 + 10^2 d_2 + 10 d_1 + d_0 = 8k$<br>$\Rightarrow \frac{1000 d_2}{8} + \frac{10^2 d_2 + 10 d_1 + d_0}{8} = k$<br>$\Rightarrow 125 d_2 + \frac{10^2 d_2 + 10 d_1 + d_0}{8} = k$<br>É preciso que $10^2 d_2 + 10 d_1 + d_0$ (número formado pelos últimos 3 algarismos) seja múltiplo de 8 para que k seja um número natural. | $3392$ é múltiplo de 8, pois $392$ é múltiplo de 8. (De fato, $3392 = 8 \cdot 424$) |
| **9** | A soma dos algarismos é múltiplo de 9. | $d_2 d_1 d_0 = 9k$<br>$\Rightarrow 10^2 d_2 + 10 d_1 + d_0 = 9k$<br>$\Rightarrow (99+1) d_2 + (9+1) d_1 + d_0 = 9k$<br>$\Rightarrow 9(11 d_2 + d_1) + d_2 + d_1 + d_0 = 9k$<br>$\Rightarrow \frac{9(11 d_2 + d_1)}{9} + \frac{d_2 + d_1 + d_0}{9} = k$<br>$\Rightarrow 11 d_2 + d_1 + \frac{d_2 + d_1 + d_0}{9} = k$<br>É preciso que $d_2 + d_1 + d_0$ seja múltiplo de 9 para que k seja um número natural. | $3393$ é múltiplo de 9, pois $3 + 3 + 9 + 3 = 18$ (múltiplo de 9). (De fato, $3393 = 9 \cdot 377$) |
| **10** | O último algarismo é 0. | $d_2 d_1 d_0 = 10k$<br>$\Rightarrow 10^2 d_2 + 10 d_1 + d_0 = 10k$<br>$\Rightarrow 10(10 d_2 + d_1) + d_0 = 10k$<br>$\Rightarrow \frac{10(10 d_2 + d_1)}{10} + \frac{d_0}{10} = k$<br>$\Rightarrow 10 d_2 + d_1 + \frac{d_0}{10} = k$<br>É preciso que $d_0$ seja 0 para que k seja um número natural. | $3390$ é múltiplo de 10. (De fato, $3390 = 10 \cdot 339$) |

Observação: Fizemos as demonstrações para números com 3 algarismos ou 4 (no caso da divisibilidade por 8), porém pode-se demonstrar de forma análoga para números com qualquer número de algarismos.